

DISTRIBUIÇÃO DE TEMPOS DE RESIDÊNCIA E  
MODELAGEM DE UM TRECHO DE RIO

POR

Rubens M. Moreira, Pedro E. Aun, Alaor A. Castro  
CDTN/NUCLEBRÁS - COPASA/MG

RESUMO

As distribuições dos tempos de residência da água em trechos contíguos do Rio Arrudas, em Belo Horizonte, MG, foram levantadas com injeções de radiotraçador ( $\text{Br}^{82}$ ). Para se obter a distribuição com cada trecho a partir de uma única injeção, foi utilizado um tratamento matemático dos dados obtidos experimentalmente. Medições complementares (DBO, OD, temperaturas, alturas linimétricas) efetuadas durante a passagem do traçador possibilitaram a obtenção de uma série de informações adicionais, tais como: vazões, qualidade da água e modelagem do transporte de poluentes e da propagação de enchentes nos trechos estudados.

INTRODUÇÃO

O Rio Arrudas, principal receptor dos esgotos de Belo Horizonte, vem sendo amostrado em várias seções com a finalidade de se determinar sua capacidade de auto-depuração. A intercomparação dos teores obtidos nas amostras destas seções só é possível se todas corresponderem a uma mesma "massa" de água, que se desloca ao longo do trecho sofrendo as mesmas ações bio-químicas e físico-químicas. O trecho do rio estudado foi dividido em quatro sub-trechos com características fisiográficas bem características. O perfil mostrado na Figura 1 mostra que se trata de dois trechos em corredeiras (entre o ponto de injeção e a seção  $P_5$  e entre as seções  $P_7$  e  $P_{10}$ ) intercalados entre dois trechos sinuosos de planície (entre as seções  $P_5$  e  $P_7$  e entre as seções  $P_{10}$  e  $P_{12}$ ). Para orientar a sequência das amostragens foram utilizados dos radiotraçadores para se determinar os tempos médios de residência entre as seções de coleta (traçadores corantes revelaram-se impraticáveis devido à elevada turbidez e carga em suspensão).

A metodologia consiste na injeção instantânea de um traçador conservativo, completamente miscível e não passível de adsorção pelos sedimentos - tal como uma solução de  $\text{KBr}^{82}$  - e a detecção dos picos de radioatividade resultantes em seções a jusante, observado um comprimento de percurso suficiente para o completo misturamento transversal do traçador. O registro do sinal dos detectores de radiação fornece diretamente a distribuição dos tem

pos de passagem das moléculas do líquido no trecho entre as secções de injeção e de detecção. A média estatística desta distribuição corresponde ao tempo médio de residência no dito trecho, sendo, portanto, a informação desejada para se estabelecer o esquema de amostragem.

Entretanto os registros dos sinais de radioatividade contêm uma série de outras informações sobre as características hidrodinâmicas do escoamento. A análise exaustiva destes dados, somada às medições simultâneas de parâmetros de qualidade da água e à observação das variações das características hidráulicas permitiu-nos com um esforço complementar relativamente pequeno, obter um conjunto de informações adicionais sobre o transporte dos poluentes e a propagação de transientes (tais como cheias) no trecho estudado [1].

#### DETERMINAÇÃO DOS TEMPOS DE RESIDÊNCIA

Injetando-se uma atividade arbitrária no trecho em estudo e obtendo-se uma resposta  $C(t)$  com o detector posicionado na secção de saída, a distribuição dos tempos de residência é dada pela função  $h(t)$ :

$$h(t) = \frac{C(t)}{\int_0^{\infty} C(t) dt} \quad (1)$$

O tempo médio de residência,  $\bar{t}$ , correspondendo à média estatística de  $h(t)$  é calculado pela expressão:

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t h(t) dt \quad (2)$$

Como  $\bar{t}$  é afetado por variações na vazão, é preciso que sua determinação seja repetida em condições hidrológicas distintas, de modo a se poder traçar um hidrograma  $\bar{t}$  versus vazão (ou  $\bar{t}$  versus nível, caso não se disponha da curva-chave).

Neste trabalho foram efetuadas duas injeções: uma de manhã e outra à tarde. A vazão do Rio Arrudas é largamente dominada pelo regime de descargas dos esgotos sanitários de Belo Horizonte. No trecho estudado, este regime induz características de vazão bem distintas: baixas durante o período matinal, elevando-se gradativamente até alcançar um valor aproximadamente constante no período da tarde (Figura 2). Em consequência, foram feitas medições em cada um destes períodos. Como as variações ao longo do ciclo hidrológico são de segunda ordem em relação às variações das descargas de esgotos, e as eventuais cheias se propagam muito rapidamente, acredita-se que estas duas medições reflitam, em uma primeira aproximação, as condições hidrológicas extremas. Os resultados obtidos estão mostrados na Figura 3, onde  $P_5$ ,  $P_7$ ,  $P_{10}$  e  $P_{12}$  designam as secções onde se efetuaram as detecções.

## DETERMINAÇÃO DAS VAZÕES

Em muitos casos, a utilização de traçadores não resiste a uma comparação em custos e simplicidade com o método do molinete. Em casos especiais de trechos com corredeiras e altamente poluídos, como o aqui considerado, o método do traçador é em geral vantajoso. De qualquer maneira, como o traçador era necessário para a determinação dos tempos de residência, as vazões são obtidas como sub-produto, exigindo apenas um pequeno esforço adicional de calibração das sondas em laboratório.

Um simples balanço de traçador entre as secções de entrada e saída do trecho permite obter a fórmula para o cálculo da vazão  $Q$  <sup>(2)</sup>:

$$Q = \frac{R_c V}{f \int_0^{\infty} C(t) dt} \quad (3)$$

onde  $f$  é a fração do volume total da solução radioativa que foi retirado como alíquota para a calibração,  $V$  o volume no qual esta alíquota foi diluída e  $R$  a contagem resultante após esta diluição, observada a mesma geometria de contagem do campo. A integral no denominador já havia sido computada na Equação (1). Os valores obtidos em duas das secções de medição são dados na tabela a seguir:

Ponto	VAZÕES (m <sup>3</sup> /s)	
	Manhã	Tarde
P <sub>5</sub>	5,5	6,0
P <sub>12</sub>	5,6	6,2

Tabela 1: Vazões medidas nos dois períodos do dia

### MEDIÇÃO DA QUALIDADE DA ÁGUA

O OD e as temperaturas da água e do ar foram continuamente monitorados durante todo o período do trabalho com um oxímetro e termômetros. Para a DBO, foram colhidas 15 amostras nas secções P<sub>5</sub> e P<sub>12</sub> a espaços de meia hora. As temperaturas sofreram um aumento contínuo durante o período. A da água variou de 22°C (7:00h) a 27°C (16:00h); a do ar de 19°C (7:00h) a 28°C (13:00h). Os resultados para OD e DBO estão mostrados nas Figuras 4 e 5.

A evolução dos teores de OD indica um decréscimo nitidamente coincidente com os tempos em que a vazão dos esgotos aumentou, conforme indicado pelas leituras dos níveis da água. A diminuição consistente dos teores de OD entre as secções P<sub>5</sub> e P<sub>12</sub>, conjugada à diminuição da DBO, indica que o rio se autodepurou no trecho correspondente.

A evolução da DBO apresenta características notáveis. As oscilações são bem maiores do que do OD, mas também acusam um acréscimo de poluentes correspondente aos instantes em que caiu o teor de OD e subiu o nível da água. É interessante notar a passagem de

um "volume" de água menos poluída na secção P<sub>5</sub> às 9:30h. Este mes no volume passou por P<sub>12</sub> cerca de 3 horas depois. Este valor é a penas ligeiramente superior aos dos tempos médios de residência no trecho ( $\bar{t} = 2:44h$  pela manhã e  $\bar{t} = 2:35h$  pela tarde; mas deve-se ter em conta que a curva da DBO é construída a partir de amos tras espaçadas de 0:30h entre si). A forma das duas curvas é tam**ém** semelhante. Deslizando-se a curva correspondente a P<sub>5</sub>, ela irá superpor-se, a menos da magnitude, sobre a curva de P<sub>12</sub> com considerável coincidência.

Estas observações induziram à execução de um tratamento estatístico sobre os dados, para melhor evidenciar e quantificar tais correlações.

O grau de correlação entre as duas séries temporais, correspondentes aos valores de um mesmo parâmetro em P<sub>5</sub> e P<sub>12</sub>, designadas por x(t) e y(t) respectivamente, pode ser quantificado pela função de inter-correlação <sup>[3]</sup>:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t+\tau) y(t) dt \quad (4)$$

Esta operação matemática corresponde a deslocar a função x(t) de  $\tau$  unidades de tempo e compará-la com y(t) através do somatório dos produtos dos valores das funções par a par. Caso haja alguma dependência entre as séries, o valor de  $\tau$  correspondente à máxima correlação  $R_{xy}$  pode ser interpretado como o tempo que o sistema gasta para transportar a grandeza medida de um ponto de medição ao outro. (O teste acusará correlação mesmo para grandes não conservativas tais como o OD e a DBO, desde que o sistema seja linear e estacionário).

A aplicação do teste forneceu os resultados mostrados na Figura 6, onde  $\rho_{xy}(\tau)$  é um valor normalizado de  $R_{xy}(\tau)$  <sup>[3]</sup>, tal que seu campo de variação fique restrito ao intervalo de valores:

$$-1 < \rho_{xy}(\tau) < 1 \quad (5)$$

O pico exibido pela curva  $\rho_{DBO}$  da DBO é notável. O pico da curva  $\rho_{OD}$ , de OD, embora menos pronunciado, é claramente inequívoco e coincidente com o pico da DBO (sendo  $\tau$  aproximadamente coincidente com  $\bar{t}$ ). A curva  $\rho_{\Delta H}$  refere-se ao teste aplicado às curvas de variação do nível d'água medidos nas secções P<sub>5</sub> e P<sub>11</sub>, entre as quais o tempo médio de passagem foi estimado como  $\bar{t} = 0:58h$ .

Estas agudas - e inicialmente insuspeitadas - correlações, vêm indicar que outras grandezas físicas (mais facilmente mensuráveis do que a concentração de um traçador artificial) podem ser utilizadas para a determinação aproximada dos tempos de residência.

#### MODELO DO TRANSPORTE DE POLUENTES

Já foi mencionado que o registro completo dos picos de radioatividade contém várias outras informações além do simples tempo

médio de residência. Na verdade, estes registros expressam a distribuição dos tempos de residência das várias moléculas que compõem o fluxo; a simples forma que estas distribuições assumem pode indicar, em exame visual, peculiaridades no sistema tais como trajetórias preferenciais e regiões estagnadas. Os aspectos dos registros obtidos neste estudo não indicavam anomalias patentes desta natureza e considerou-se, em uma primeira aproximação, a advecção e a dispersão como os mecanismos de transporte de poluentes. Como o curso d'água é pouco profundo, relativamente estreito e turbulento, os gradientes transversais e verticais de concentração não são significativos e um modelo unidimensional representa bem a dinâmica de qualquer poluente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - R \quad (6)$$

sendo C a concentração do poluente, x a distância no sentido longitudinal,  $\bar{u}$  a velocidade média e D o coeficiente de dispersão longitudinal. O termo de desaparecimento R foi introduzido para permitir a aplicação do modelo a poluentes não conservativos. No caso da DBO, por exemplo, que exibe uma cinética de desaparecimento de primeira ordem:  $R = KC$ , a solução da equação acima para uma condição de contorno representando uma injeção instantânea e puntual de uma massa unitária do poluente, é:

$$C(x,t) = \frac{\bar{u}}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Dt} - Kt \right] \quad (7)$$

Caso o modelo seja efetivamente válido para o rio estudado, o registro do traçador deve se conformar a esta expressão, com os valores adequados para K,  $\bar{u}$  e D. K equivale à constante de decaimento do  $Br^{82}$  ( $K = 0,019 \text{ h}^{-1}$ ) e  $\bar{u}$  pode ser determinada independentemente, pois são conhecidos os comprimentos dos vários trechos e os tempos médios gastos para percorrê-los.

O coeficiente de dispersão D pode então ser determinado por um ajuste da Equação (7) às curvas experimentais, utilizando-se métodos matemáticos de otimização. A qualidade do ajuste finalmente obtido pode ser quantificada e, se ela se revelar satisfatória, o modelo com os valores ótimos dos parâmetros pode ser utilizado como um instrumento de simulação da poluição induzida por fontes com quaisquer regimes de vazão (processos de convolução).

Deve-se porém considerar se o simples ajuste da Equação (7) aos registros obtidos em cada uma das seções de medição forneceria um valor de D válido para todo o trecho compreendido entre a seção em questão e a seção da injeção. Um tal valor de D não seria em nada representativo, já que o rio foi subdividido em vários trechos justamente porque cada um deles apresentava características fisiográficas bastante distintas. Para se evitar a carga de trabalho resultante de injeções múltiplas (uma na entrada de cada trecho), foi aqui aplicado um método matemático que explora as relações entre sinais em sistemas lineares. Operando com as respostas (arbitrárias) obtidas na entrada e saída de cada trecho, o método possibilita a recuperação da resposta impulsional

do trecho, isto é, o registro de traçador que seria obtido na secção de saída caso se fizesse uma injeção instantânea na secção de entrada do dito trecho (processo de deconvolução).

A Figura 7 estabelece a nomenclatura para sinais em sistemas arbitrários (caixas pretas). A um sinal de entrada  $\delta(t)$ , que apresenta um pulso instantâneo e puntual de traçador, corresponde o sinal de saída  $C(t)$ , que é a resposta impulsional do sistema. Caso este sistema possa ser representado pelo modelo da dispersão unidimensional, a expressão de  $C(t)$  é dada pela Equação (7). Se, neste mesmo sistema, se entrar com um sinal arbitrário obtem-se uma resposta  $y(t)$ . Se o sistema for linear pode-se demonstrar que a relação entre  $x(t)$  e  $y(t)$  é dada por

$$y(t) = \int_0^t C(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad (8)$$

A determinação dos coeficientes de dispersão é feita atribuindo-se sucessivos valores a  $D$  na expressão de  $C(t-\tau)$  e executando-se numericamente a integração acima, usando-se para  $x(t)$  o registro medido na entrada do trecho. A função  $y(t)$  assim obtida é comparada com a resposta experimental  $y_e(t)$ , efetivamente registrada na saída do trecho e o valor mais adequado para  $D$  é recuperado. O processo é reiterado utilizando-se um algoritmo que acelere a convergência do processo de minimização de

$$\Phi(D) = \int_0^{\infty} [y_e(t) - y(t,D)]^2 dt \quad (9)$$

No presente estudo a função objetivo  $\Phi(D)$  foi otimizada utilizando-se o método da secção áurea<sup>[4]</sup>.

Um exemplo típico do ajuste do modelo a uma resposta impulsional reconstituída é mostrado na Figura 8. Embora o ajuste não tenha sido perfeito, é pouco provável que a utilização de modelos mais sofisticados justifiquem o trabalho e custo adicionais de processamento dos dados.

Uma vez obtido o valor de  $D$ , o mesmo processo poderia ser utilizado para determinar os valores das constantes de desaeração e de reaeração, usando-se as equações de Streeter-Phelps e as medições de DBO e OD na Equação (8). Este cálculo, ainda em execução, fornecerá o quadro final da capacidade de auto-depuração do rio.

Um outro parâmetro facilmente calculado a partir dos registros experimentais é a variância dos picos:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - \bar{t})^2 C(t) dt \quad (10)$$

que também fornece uma medida da capacidade de dispersão, independentemente de qualquer modelo (que pode não ser plenamente satisfatório). A evolução da variância da nuvem do traçador ao

longo do percurso é mostrada na Figura 9. O alto coeficiente de correlação linear  $r^2$  indica que  $\sigma^2$  é diretamente proporcional à variável tempo. Isto fornece uma ordem da magnitude dos vórtices que causam o processo da dispersão [1].

#### MODELO DE PROPAGAÇÃO DE ENCHENTES

Os dados obtidos com o traçador, ao refletir a dinâmica do rio, também indicam a maneira de propagação de transientes da vazão. Do ponto de vista da análise de sistemas, o rio pode ser considerado como um sistema - ou conjunto de sub-sistemas - que age sobre o hidrograma de entrada para transformá-lo no hidrograma de saída (Figura 7).

Um sistema dinâmico caracterizado pela predominância de transporte dispersivo e advectivo, como foi visto ser o caso em estudo, pode ser aproximado por uma série de compartimentos iguais perfeitamente misturados [5]. Se um determinado trecho for assimilado a N destes compartimentos em série, pode-se demonstrar [1] que a relação entre uma perturbação da vazão  $\delta Q_0$ , instantaneamente, na entrada do trecho e a perturbação  $\delta Q(t)$  resultante na saída é dada pela expressão:

$$\delta Q(t) = \frac{N^N t^{N-1} e^{-Nt/\bar{t}}}{(N-1)! \bar{t}^N} \delta Q_0 \quad (11)$$

e, se a perturbação na entrada não for instantânea, pode-se aplicar o princípio da convolução expresso pela Equação (8):

$$\delta Q(t) = \int_0^t \frac{N^N \tau^{N-1} e^{-N\tau/\bar{t}}}{(N-1)! \bar{t}^N} \delta Q_0(t-\tau) dt \quad (12)$$

desde que a magnitude da perturbação não force o sistema a um comportamento não-linear. Aplicando-se uma transformação de Laplace:

$$\overline{\delta Q}(s) = \int_0^\infty \delta Q(t) e^{-st} dt \quad (13)$$

à Equação (12), pode-se obter algo mais manipulável [1]:

$$\overline{\delta Q}(s) = (1 + \bar{t}s)^{-N} \overline{\delta Q_0}(s) \quad (14)$$

Os valores de N para os diversos trechos foram determinados usando-se a relação abaixo, que pode ser estabelecida pelo método dos momentos [1]:

$$N = \frac{\bar{t}^2}{\sigma^2} \quad (15)$$

Para se comprovar a validade do modelo, foi planejado um teste que independesse inteiramente dos dados do traçador, que haviam sido utilizados para determinar os valores de N. Foram nele utilizados os registros das variações do nível da água em duas

secções, os quais foram relacionados com as variações de vazão pela expressão:

$$\delta Q(t) = \frac{\delta H(t) B L}{\bar{t}} \quad (16)$$

onde  $\delta H$  é o nível da água em relação a um nível de referência tal que  $\delta H = 0$  quando  $\delta H = 0$ , B e L são a largura e o comprimento do trecho, respectivamente.

A transformação indicada na Equação (13) foi feita numericamente, fazendo-se  $s = j 2 \pi f$  (onde  $j = \sqrt{-1}$ ) e aplicando-se o eficiente algoritmo da Transformada de Fourier Rápida (FFT).

Com os valores de  $\delta Q$  na secção  $P_5$ , calculados a partir do registro dos níveis  $\delta H$ , a equação (12) foi utilizada com o valor apropriado de N, gerando o gráfico de  $\delta Q$  em  $P_{11}$ . Os valores assim calculados foram então comparados com o registro de  $\delta Q$  em  $P_{11}$  (também calculado a partir dos dados experimentais de  $\delta Q$ ).

A comparação é mostrada na Figura 10. Observa-se que, apesar de várias aproximações e suposições que se fizeram necessárias<sup>1)</sup>, o modelo produziu resultados excelentes. Ressalte-se que o modelo foi determinado por ajuste às curvas do traçador e testado contra as medidas de nível com régua. O fato de uma medida ter podido reproduzir a outra - que lhe era totalmente independente - com prova a capacidade do modelo.

#### REFERÊNCIAS

- 1 MOREIRA, R.M. et alii, Distribuição de tempos de residência e desenvolvimento de modelos para o Ribeirão Arrudas no trecho compreendido entre as pontes da rua Itamar e de General Carneiro, Belo Horizonte, CDTN/NUCLEBRÁS, 1980.
- 2 GARDNER, R.P. & ELY JR., R.L., Radioisotope measurement applications in engineering, New York, Reinhold Publishing Co., 1967.
- 3 BENDAT, J.S. & PIERSOL, A.G., Random data: analysis and measurement procedures, New York, Wiley-Interscience, 1971.
- 4 CASTRO, J.O.N.M. et alii, Tracer measurement and analysis of pollution in streams, Belo Horizonte, CDTN/NUCLEBRÁS, 1977.
- 5 WHITEHEAD, P. et alii, A systems model of stream flow and water quality in the Bedford-Ouse River - 1. Stream flow modelling, Water Research, 13: 1155, 1979.

./jms.

DISTRIBUTION OF RESIDENCE TIMES AND  
MODELLING OF A RIVER

BY

Rubens M. Moreira, Pedro E. Aun, Alaor A. Castro  
CDTN/NUCLEBRÁS - COPASA/MG

ABSTRACT

Residence time distributions for water in adjoining stretches of the river Ar rudas in Belo Horizonte, have been measured by means of a radiotracer ( $\text{Br}^{82}$ ). In order to determine the distribution for each separate stretches with the data obtained from a single injection, a special mathematical method has been employed. Additional measurements (BOD, DO, temperatures, water levels) were performed, simultaneously with the tracer test, and have generated a series of complementary information, such as: flow rates, water quality, besides allowing the development of mathematical models for pollutant transport and stream flow.