

Consequências do Confinamento de Neutrinos
na Formação de
Proto-Estrelas de Nêutrons Híbridas

Suely Epsztein Grynberg

Orientadora: Maria Carolina Nemes

Co-Orientador: Hilário Antônio Rodrigues Gonçalves

Tese apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como
requisito parcial para obtenção do grau de DOUTOR EM FÍSICA.

Agradecimentos

À Carolina, por mais uma vez ter confiado em mim e por ter uma grande capacidade de compreender um trabalho muito antes dele existir, me conduzindo com precisão.

Ao Hilário pela sua preciosa co-orientação. Sem ela teria sido impossível.

Ao Sérgio Duarte por ter sempre me atendido tão bem e me ajudado tanto.

Ao CBPF por ter me recebido inúmeras vezes e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Ao meu chefe, Ivan Aronne e a todos os meus colegas da CT-4, pela paciência e total apoio.

Ao CDTN por ter me encorajado a continuar.

Ao Departamento de Física por nunca ter deixado de ser a minha casa.

Ao Centro de Física Teórica de Coimbra, onde tudo começou.

À minha família e aos meus amigos por terem compreendido a importância deste trabalho para mim.

E ao meu pai, que tanta falta ainda me faz e que sempre teve o sonho de ter uma filha “doutora”.

Eu agradeço ainda, a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram para que eu finalmente conseguisse chegar até aqui, ou cujas simples existências tenham me feito mais feliz.

Índice analítico

AGRADECIMENTOS	2
RESUMO.....	1
ABSTRACT	2
INTRODUÇÃO	3
CAPÍTULO I.....	6
A EVOLUÇÃO ESTELAR.....	6
1.1 INTRODUÇÃO	6
1.2 O DIAGRAMA HR.....	8
1.2.1 A Pré Sequência Principal.....	8
1.2.2 A Sequência Principal	9
As cadeias pp.....	10
O ciclo CNO.....	11
1.2.3 A Pós-Sequência Principal	12
1.3 O LIMITE DE CHANDRASEKHAR	12
1.4 AS ANÃS BRANCAS.....	14
1.5 AS GIGANTES VERMELHAS.....	15
1.6 NUCLEOSSÍNTESE DOS ELEMENTOS PESADOS	17
1.7 A IMPLOÇÃO	18
1.8 O CONFINAMENTO DE NEUTRINOS	20
1.9 A EXPLOÇÃO	22
1.10 AS SUPERNOVAS E AS ESTRELAS DE NÊUTRONS	23
CAPÍTULO 2.....	26
A HADRODINÂMICA QUÂNTICA.....	26
2.1 INTRODUÇÃO	26
2.2 O MODELO QHD-I.....	26
2.3 O MODELO QHD-II	35
2.3.1 O acoplamento $\rho - N$	35
2.3.2 A Lagrangiana QHD-II.....	35
2.3.3 As Equações de Estado.....	38
CAPÍTULO 3.....	40
DESCRIÇÃO LAGRANGIANA DO BOUNCE HIDRODINÂMICO	40
3.1 INTRODUÇÃO	40
3.2 O FORMALISMO	41
3.3 CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA.....	42
3.4 A ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL E A ENERGIA INTERNA.....	48
3.5 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO.....	49
3.6 EQUAÇÕES DE ESTADO	54
3.7 A CONDIÇÃO INICIAL	55
3.8 ACIONAMENTO DO COLAPSO GRAVITACIONAL	56
CAPÍTULO 4.....	58

TRANSIÇÃO DE FASE DA MATÉRIA ESTELAR HADRÔNICA PARA PLASMA DE QUARKS E GLÚONS	58
4.1	INTRODUÇÃO58
4.2	TRANSIÇÃO DE FASE DE PRIMEIRA ORDEM COM MAIS DE DUAS CARGAS CONSERVADAS...58
4.3	FASE DE HÁDRONS.....66
4.4	FASE DE QUARKS73
4.5	FASE MISTA75
CAPÍTULO 5.....	80
RESULTADOS E CONCLUSÕES	80
5.1	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....80
5.2	CONCLUSÕES87
5.3	PERSPECTIVAS87
APÊNDICE A.....	89
O EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO.....	89
APÊNDICE B.....	91
O LIMITE DE CHANDRASEKHAR	91
APÊNDICE C.....	95
O MODELO DE SACOLA DO M.I.T.	95
Introdução	95
O Modelo de Sacola	95
APÊNDICE D.....	97
NOTAÇÕES E CONVENÇÕES.....	97
REFERÊNCIAS.....	99

Resumo

Consideramos um modelo semi-analítico esquemático para o cálculo dinâmico de um processo de colapso-explosão que conduz à formação e composição de proto-estrelas de nêutrons. A transição de fase hádrons-quarks é incluída em um cenário onde neutrinos são confinados e interações entre hádrons, como também, entre quarks são levadas em conta. A atração principal do modelo, além de sua simplicidade, é que ele fornece uma descrição precisa quantitativa de características globais do processo tais como: massa ejetada, energia da onda de choque nascente, massa e raio do caroço remanescente. Apresentamos a evolução temporal do sistema durante o processo de colapso-explosão e concluímos que a formação de um caroço remanescente híbrido é inibida pelo confinamento dos neutrinos durante o *bounce* do caroço.

Abstract

We consider a schematic semi-analytical model for the dynamical calculation of collapse-explosion leading to the formation and composition of protoneutron stars. Hadron to quark phase transition is included in a scenario where neutrinos are trapped and interactions among hadrons as well as among quarks are taken into account. The main appeal of the model, besides its simplicity, is that it gives a quantitatively accurate description of all global features of the process such as ejected mass, the energy of the nascent shock wave, the mass and radius of the remnant core. We present the time evolution of the system during the collapse-explosion process and we conclude that the formation of a hybrid remnant core is inhibited by neutrino trapping at the onset of the core bounce.

Introdução

Acredita-se que as estrelas de nêutrons sejam produto de explosões de supernovas. Baade e Zwicky especularam que, quando uma estrela massiva colapsa, após a ejeção da envoltória, deve haver a formação de uma estrela de nêutrons remanescente. [1]

A possibilidade da existência de matéria de quarks no centro de estrelas de nêutrons foi sugerida em 1969 por Ivanenko e Kurdgelaidze [2]. Isso incentivou a procura de uma equação de estado que descrevesse a matéria densa e que fosse compatível com a física nuclear até então conhecida. Essa equação de estado deveria prever a transição de fase hádrons-quarks quando a matéria estelar atingisse densidades compatíveis.

Algumas perguntas pertinentes se referem à investigação das consequências de uma equação de estado na própria supernova: haveria a possibilidade de ocorrer uma transição de fase nesse cenário? após a explosão, o caroço remanescente não seria a proto-estrela de nêutrons? e como seria o perfil de densidade da matéria e a própria matéria dentro desta estrela?

Para a física nuclear em particular, o estudo da explosão e das estrelas de nêutrons tem sido um guia muito útil para se prever as propriedades da matéria nuclear submetida à condições extremas de densidade e temperatura, permitindo aprimorar o nosso conhecimento sobre as forças nucleares e a interação hadrônica. Para a astrofísica em geral, o estudo das supernovas se justifica por estarem associadas, como se presume, à formação de estrelas de nêutrons e buracos negros, além de propiciarem a verificação da teoria da evolução estelar padrão.

Para descrever as propriedades da matéria estelar desde o colapso até o *bounce** necessita-se de uma equação de estado que seja adequada à uma faixa muito larga de densidades, desde aproximadamente 10^8 g/cm^3 até $\approx (2-5)\rho_0$ onde $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ é a densidade de saturação da matéria nuclear. Para este propósito, três equações de estado obtidas para diferentes regimes de densidade serão ligadas em nosso trabalho.

Existe porém, uma diferença fundamental entre a física que gera a proto-estrela logo após a explosão da supernova e aquela que governa a estrela de nêutrons em equilíbrio: o confinamento de neutrinos. Embora possamos considerar a mesma equação de estado para ambas no que se refere à interação forte, existe pelo menos um lépton - o neutrino, que terá um papel muito importante na explosão, pois ele endurece a equação de estado, dificultando que densidades suficientemente altas sejam atingidas durante este processo. Mas, os neutrinos acabam escapando da estrela e estarão completamente ausentes da estrela de nêutrons.

Durante o colapso de uma estrela massiva uma quantidade enorme de neutrinos é produzida pelo processo de captura eletrônica. Esses neutrinos têm energias na faixa de 20 a 30 MeV e ficam confinados quando a densidade de matéria estelar atinge valores em torno de 10^{11} g/cm^3 obrigando a fração leptônica da estrela a permanecer constante [3,4].

Prakash et al. incluíram o efeito do confinamento dos neutrinos em cálculos estáticos de proto-estrelas frias concluindo que a transição de fase hádrons-quarks deveria ocorrer [5].

*Nos instantes finais do colapso, o caroço da estrela inverte repentinamente o sentido do movimento (*bounce*), ao mesmo tempo em que as camadas externas próximas ao caroço, em movimento praticamente de queda livre, colidem violentamente com ele, sendo então refletidas.

Embora o processo da explosão da supernova envolva vários aspectos da física em geral, como a física de partículas, a hidrodinâmica, fenômenos não-lineares, etc., partimos neste trabalho do pressuposto de que existem propriedades globais como o raio e a massa da estrela remanescente e a energia da onda de choque que provoca a explosão, que devem independer de detalhes muito específicos e que, portanto, podem ser obtidas dentro do contexto de um modelo esquemático que contenha o mínimo necessário desta física tão complexa.

Para supernovas do tipo II*, acredita-se que um *bounce* hidrodinâmico deve ocorrer depois da fase de colapso quando o meio estelar sofre uma transição súbita do regime subnuclear para o regime hadrônico em alguns milissegundos [6,7]. Neste momento uma onda de choque deve ser gerada. A ruptura ou não do manto estelar depende fortemente da equação de estado utilizada, uma vez que é esta última que rege o conteúdo energético da frente de onda[8].

Os primeiros estudos do mecanismo de explosão súbita [9,10] começaram com um conjunto de simulações por van Riper [11] em 1979, seguidos de cálculos do mesmo autor usando hidrodinâmica relativística geral [12].

Embora o mecanismo de explosão súbita seja aparentemente ideal para explicar a explosão de supernovas tipo II, ele parece não funcionar eficientemente, como se mostrou em vários cálculos numéricos [13]. A principal razão para esta falha é que a onda de choque formada pelo *bounce* do caroço interno tem dois sumidouros de energia: a maior parte da energia é gasta na disruptura dos núcleos presentes na matéria em queda livre. Além disto, os neutrinos produzidos neste processo deixam a matéria comprimida e causam também perda de energia, decrescendo a pressão atrás da onda de choque [4,14].

Existe ainda o chamado *mecanismo retardado* [15,16] caracterizado pelo ressurgimento da intensidade da onda de choque via neutrinos. Os cálculos são complexos e ainda inconclusivos [17,18].

Mesmo com as inúmeras simplificações sugeridas na literatura e introduzidas em vários trabalhos, os cálculos atuais requerem técnicas numéricas sofisticadas e um enorme tempo de computação.

Neste trabalho usamos um modelo [19] no qual a dinâmica é formulada em termos de um princípio variacional. Os ingredientes (que consideramos essenciais) contidos no modelo, são variáveis coletivas, tais como os raios de um número pequeno de camadas (no caso, duas) e suas respectivas massas. Estas variáveis dinâmicas devem obedecer a um princípio variacional onde o potencial a ser estudado contém dois termos, a parte gravitacional e a energia interna, onde se encontra toda a informação sobre a equação de estado. As massas dentro de cada camada são consideradas como coordenadas generalizadas na Lagrangiana efetiva. Consequentemente a transferência de massas é permitida na evolução dinâmica e o cálculo nos fornece valores finais para as massas (e raios) das camadas.

A grande vantagem deste tratamento é a possibilidade de se considerar a onda de choque como um fenômeno bastante natural. Estas duas camadas permitem simular esquematicamente o *bounce* hidrodinâmico e nos resultados ganhamos uma imagem física simples do processo de transferência de massa e energia.

* Supernovas do tipo II são em geral, resultado final da evolução de estrelas massivas, com $8M_{\odot} \leq M \leq 60M_{\odot}$ que evoluem para um evento final de explosão.

Nesse trabalho, construiremos a transição de fase considerando, na fase hadrônica, todo o octeto bariônico e o quarteto Δ , e na fase de plasma os quarks u , d e s . Durante a transição da fase de hádrons para a fase de plasma de quarks, as duas fases coexistem no mesmo fundo de léptons (elétrons e múons e seus respectivos neutrinos). Para a descrição da fase hadrônica, utilizaremos uma teoria relativística de campo médio, que descreve de forma efetiva a interação entre os campos bariônicos e os campos mesônicos escalar, vetorial e isovetorial. Consideraremos também uma interação efetiva [20] na fase de quarks desconfinados. Consideraremos a conservação da carga bariônica, da carga elétrica e da fração leptônica, esta última devido ao confinamento dos neutrinos. Um dos aspectos mais interessantes de um sistema que possui mais de uma carga conservada, é que quando ele sofre uma transição de fase de 1ª ordem ele apresenta uma fase mista onde as duas fases coexistem, mas, diferentemente do caso de um sistema que possui apenas uma componente, a pressão não permanece constante e o processo passa a ser não trivial [21]. Os potenciais químicos são usados para expressar as condições de equilíbrio para um sistema de várias componentes que carregam partes das cargas globais conservadas. Quando transformações entre espécies são possíveis, estes vínculos juntamente com os critérios de Gibbs definem relações entre os potenciais químicos.

Mostramos que, de acordo com o modelo usado, a transição de fase não é atingida no processo dinâmico da formação de uma proto-estrela através da explosão da supernova quando o confinamento de neutrinos é levado em conta. De acordo com os nossos cálculos [22], não teremos um remanescente híbrido após a evolução temporal do processo colapso-explosão. Entretanto, após o resfriamento do caroço formado, quando os neutrinos tiverem abandonado o sistema, a equação de estado ficará correspondentemente amolecida e assim, existe a possibilidade de que este caroço se torne uma estrela de nêutrons híbrida.

Este trabalho é dividido em 5 capítulos:

No capítulo 1 tratamos da evolução estelar desde o nascimento até a explosão de uma estrela e a consequente formação de estrelas de nêutrons, considerando as reações de transformação de matéria.

No capítulo 2 discutimos as lagrangianas efetivas para a descrição da fase hadrônica na aproximação de campo médio.

No capítulo 3 discutimos o fenômeno do *bounce* como mecanismo de explosão da supernova.

No capítulo 4 estudamos a transição de fase hádrons-quarks.

E finalmente, o capítulo 5 contém os nossos resultados e conclusões.

A Evolução Estelar

On the twenty-second day of the seventh moon of the first year of the period Chih-ho, Yang Wei-tê said: "Prostrating myself, I have observed the appearance of a guest star in the constellation T'ien Kuan; on the star there was a slightly iridescent yellow color. Respectfully, according to the dispositions for Emperors, I have prognosticated, and the result said: The guest-star does not infringe upon Aldebaran; this shows that a Plentiful One is Lord, and that the country has a Great Worthy. I request that this prognostication be given to the Bureau of Historiography to be preserved".

- Sung Hui Yao

Relato de Yang wei-tê sobre observações de uma supernova no verão de 1054. Hoje a reconhecemos como a nebulosa de Caranguejo.

Introdução

As estrelas passam por certos estágios evolutivos ao longo de sua existência. Elas mudam as suas propriedades fundamentais, como luminosidade e raio, muito lentamente, de modo que em um determinado momento elas podem ser consideradas como em equilíbrio. A medida que a estrela evolui, a sua composição química muda. As reações termonucleares responsáveis pela luminosidade da estrela irão fazer com que a quantidade de hidrogênio que ela possui diminua irreversivelmente. Além disso, a sua composição química deixa de ser homogênea. A porcentagem de hidrogênio no centro da estrela cai enquanto continua praticamente inalterada na sua envoltória. Devido a essas mudanças, a estrela irá gradualmente mudar a sua posição no diagrama HR, (de Hertzsprung-Russell) [1]. Neste diagrama, cada estrela de um dado aglomerado é representada por um ponto, cuja ordenada está relacionada com a luminosidade e a abcissa com a temperatura ou o índice de cor da estrela, como mostra a Figura 1.1.

A luminosidade de uma estrela é dada pela expressão:

$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$, onde $\sigma = 5.67051 \times 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \text{ k}^4 \text{ s}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. A luminosidade do sol é $3,827 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ e ele se encontra na sequência principal do diagrama HR.

As estrelas passam a maior parte do seu tempo de vida na Sequência Principal do diagrama HR. Após este período, elas se deslocam para a região das gigantes vermelhas ou

das anãs brancas, dependendo da sua massa. Se uma gigante vermelha for suficientemente massiva, ela pode explodir violentamente como supernova.

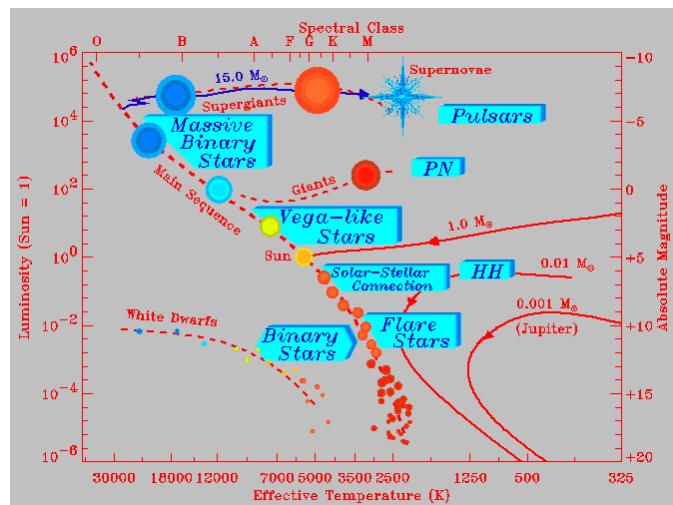


Figura 1.1- Evolução de uma estrela no diagrama H.R.

A Evolução estelar é controlada pela batalha entre Gravidade e Pressão. A medida que desequilíbrios são alcançados, a estrela é levada a achar uma nova fonte de energia. Cada fase nova da evolução estelar está consequentemente marcada por um mecanismo diferente de geração de energia.

A energia nuclear é a principal fonte de energia emitida pelas estrelas durante sua vida ativa. No seu interior as condições termodinâmicas são propícias para provocar reações termonucleares entre os elementos químicos que as compõem.

Todas as estrelas obtêm energia através da fusão termonuclear de elementos leves em elementos pesados. Temperaturas altas são necessárias para que possam ocorrer colisões em altas velocidades entre as partículas de forma que a repulsão eletrostática mútua entre prótons em cada núcleo atômico fundido seja superada. A temperatura mínima para a fusão de Hidrogênio é de 5 milhões de graus Kelvin. Elementos com mais prótons nos núcleos requerem temperaturas mais altas. Por exemplo, fundir carbono requer uma temperatura de cerca de 1 bilhão de graus Kelvin. Apesar dessas temperaturas serem inacreditavelmente altas, em física nuclear elas são insignificantes. As energias nucleares são da ordem de muitos MeV e uma temperatura de 10^{10} K, representa menos de 1 MeV de energia, o que faz com que se possa considerar as estrelas como sistemas em temperatura zero.

No interior das estrelas os núcleos de hidrogênio se fundem para formar o hélio. Entretanto, a nucleossíntese de elementos mais pesados pode ocorrer dependendo de parâmetros como a massa da estrela. Em estrelas suficientemente massivas a queima do hélio é seguida da queima do carbono, produzindo oxigênio e outros elementos até chegar ao ferro. O ferro é o núcleo com maior energia de ligação por partícula. Para que se possa sintetizar elementos mais pesados a partir do ferro, é necessário um suprimento de energia.. Quando um caroço de ferro se estabelece na estrela, o destino dela é inevitável. Depois que o suprimento de energia nuclear se esgota, ocorre o colapso gravitacional.

O destino final das estrelas, depois de consumir todo o seu combustível nuclear, depende de duas coisas: primeiro, se a estrela faz parte de um sistema binário ou múltiplo, e

segundo, de sua massa inicial. Se a estrela faz parte de um sistema binário ou múltiplo, e 60% das estrelas fazem, sua evolução depende tanto da massa quanto da separação entre as estrelas, que determinará em que ponto da evolução do sistema as estrelas interagirão.

Se a estrela não fizer parte de um sistema binário ou múltiplo, sua evolução dependerá somente de sua massa inicial. Se ela iniciar sua vida com massa menor do que $0,8 M_{\odot}$, onde M_{\odot} é a massa do Sol, igual a $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$, a idade do universo será insuficiente para esta estrela evoluir além da sequência principal. Quanto menos massivas, mais lenta é a evolução de uma estrela.

Se a estrela iniciar com massa entre $0,8$ e $10 M_{\odot}$, após consumir o hidrogênio no centro a estrela passará pela fase de gigante e depois de supergigante, ejetará uma nebulosa planetária, e terminará sua vida como uma anã branca, com massa da ordem de $0,6 M_{\odot}$, e raio de cerca de 10000 km . Para se ter uma idéia, o raio do sol é $6.96 \times 10^5 \text{ km}$.

Se a estrela iniciar sua vida com massa entre 10 e $25 M_{\odot}$, após a fase de supergigante ela ejetará a maior parte de sua massa em uma explosão de supernova, e terminará sua vida como uma estrela de nêutrons, com uma temperatura superficial acima de 1 milhão de graus K, massa de cerca de $1,4 M_{\odot}$, e raio de cerca de 20 km . Se esta estrela possuir campo magnético forte, ela emitirá luz direcionada em um cone em volta dos pólos magnéticos, como um farol, e será um pulsar. A densidade da estrela determina o período de pulsação: estrelas mais densas pulsam mais depressa que as de menor densidade. O pulsar no centro da nebulosa de Caranguejo gira 30 vezes por segundo.

Se a estrela iniciar sua vida com massa entre 25 e $100 M_{\odot}$, após a fase de supernova restará um buraco negro, com massa da ordem de $6 M_{\odot}$, e raio do horizonte menor que 1 km . O raio do horizonte, ou raio de Schwarzschild, é a distância ao buraco negro dentro da qual nem a luz escapa: $R_{\text{sch}} = 2GM/c^2$. Para algumas estrelas massivas, os modelos de deflagração da explosão de supernova prevêm dispersão total da matéria.

Se a estrela iniciar sua vida com massa acima de $100 M_{\odot}$, como a estrela da Pistola, descoberta em 1997 com o Telescópio Espacial Hubble, ela ejetará a maior parte de sua massa ainda na sequência principal, por pressão de radiação, e depois evoluirá como uma estrela de até $100 M_{\odot}$.

Os elementos químicos gerados por reações nucleares no interior das estrelas e ejetados nas explosões de supernovas produzem a evolução química do Universo.

1.2 O Diagrama HR

1.2.1 A Pré Sequência Principal

Acredita-se que uma estrela se forme devido a instabilidades gravitacionais na distribuição de matéria de um gás interestelar, que faz com que o sistema condense lentamente até formar uma proto-estrela. Uma proto-estrela é composta basicamente de hidrogênio e uma pequena parcela de núclídeos mais pesados, como o hélio, o carbono e o nitrogênio.

Inicialmente, a proto-estrela tem densidade de 1 partícula/cm³, temperatura de 10 K e raio de 10²⁰ cm aproximadamente. A contração prossegue até que a temperatura atinja aproximadamente 10⁶ K, necessária para a ionização do hidrogênio.

Durante a Pré-Sequência Principal a única fonte de energia da estrela é a gravitação. Aproximadamente a metade desta energia é convertida em calor, fazendo com que a temperatura da estrela aumente. A energia restante deve ser dissipada em forma de radiação emitida para fora do sistema e energia para manter as correntes de convecção que se estabelecem no interior da massa gasosa em contração. À medida que a densidade aumenta esses movimentos vão se restringindo às camadas mais externas até que um núcleo denso e quente seja formado.

Quando as reações termonucleares começam, a estrela para de se contrair e fica em equilíbrio por um período de tempo razoavelmente prolongado.

Esse equilíbrio hidrostático é resultante de duas forças iguais e contrárias: a força gravitacional e a pressão exercida pelo gás. A condição de equilíbrio hidrostático é expressa pela equação abaixo, demonstrada no Apêndice A.

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (1.1)$$

O lado esquerdo da equação representa a pressão agindo em um volume unitário e o lado direito, a força de atração gravitacional do volume pela massa $M(r)$ contida em uma esfera de raio r . Encontrar configurações de densidade e pressão que satisfaçam o equilíbrio hidrostático é um dos objetivos principais em teorias de estrelas.

Uma estrela permanece no estágio de Pré-Sequência Principal durante um período de tempo relativamente curto.

1.2.2 A Sequência Principal

Ao entrar na Sequência Principal, a densidade média da estrela é aproximadamente igual a 1g/cm³ e a temperatura central da ordem de 10⁶ K, quando então se iniciam as reações termonucleares. Numa primeira etapa essas reações irão transformar o hidrogênio em hélio, dando uma nova fonte de energia para a estrela, a energia nuclear.

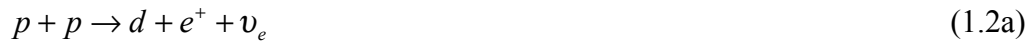
A Sequência Principal é caracterizada pela fusão do caroço de Hidrogênio. Todas as estrelas da Sequência Principal obtêm energia dessa maneira. Como o Hidrogênio é o elemento mais simples, ele funde na temperatura mais baixa possível. Devido aos fatos da taxa de fusão ser função da temperatura e da pequena seção de choque da interação fraca, a fase de queima do hidrogênio é a mais longa. Todas as fases subsequentes da evolução estelar são marcadas por temperaturas mais altas no caroço e tempos mais curtos [2].

Uma estrela na Sequência Principal tem uma estrutura simples. Ela apresenta um caroço de hidrogênio ionizado. A pressão e forças gravitacionais são iguais, a estrela é estável e seu caroço está suficientemente quente para fundir hidrogênio em hélio. Assim o caroço da estrela na Sequência Principal se tornará puro hélio e isso marcará uma nova fase evolutiva para a estrela.

Existem alguns mecanismos para a queima do hidrogênio e a consequente obtenção do hélio:

As cadeias pp

A fusão do hidrogênio se torna possível graças às chamadas cadeias *pp*, ou ciclo do hidrogênio. A primeira delas, a cadeia *pp* I, é composta pelas reações:



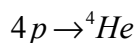
A medida que a quantidade de ${}^4\text{He}$ e a temperatura do meio vão aumentando, outra cadeia, a *pp* II entra em operação:



Outra cadeia, a *pp* III, pode ocorrer dependendo da densidade do meio e da seção de choque do ${}^7\text{Be}$, que além de poder capturar elétrons, como na reação 1.3d, pode também capturar prótons:



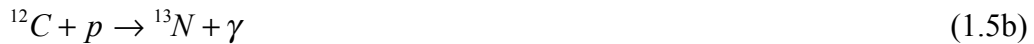
Observe que o resultado final das três cadeias é sempre



e a energia média liberada é da ordem de 26,7 MeV.

O ciclo CNO

Existe um outro conjunto de reações, capaz de processar a queima do hidrogênio: Trata-se do ciclo *CNO*, ou ciclo do carbono, dominante em temperaturas mais altas, proposto independentemente em 1938 por Von Weizsaker [3], e em 1939 por H. Bethe [4]. O ciclo *CNO* é constituído pelas reações:



Embora com menor probabilidade, o ciclo pode se estender através das reações:



Fazendo com que a quantidade de nitrogênio aumente consideravelmente no meio.

A temperatura e a abundância de elementos químicos no centro da estrela são os fatores que determinarão qual ciclo será dominante na fusão do hidrogênio, as cadeias *pp* ou o ciclo *CNO*.

Quando todo o hidrogênio do caroço da estrela tiver sido consumido, o sistema assume a seguinte estrutura: Um núcleo denso composto basicamente de ^4He e uma camada externa rica em hidrogênio. Não existindo condições termodinâmicas que possibilitem a fusão do hélio, as reações nucleares podem passar a ocorrer nas camadas externas, queimando o hidrogênio ali presente. Com o conseqüente aumento da temperatura, estas camadas se

expandem, e a estrela move-se para a região das gigantes vermelhas no diagrama HR. O que acontecerá depois irá depender fortemente da massa com que a estrela sai da Sequência Principal.

1.2.3 A Pós-Sequência Principal

Uma estrela na fase de Pós-Sequência Principal tem duas regiões quimicamente distintas: um caroço de hélio cercado por um envoltório de hidrogênio. Como o hélio tem dois prótons em seu núcleo, a sua fusão requer uma temperatura mais alta para superar a barreira eletrostática entre eles. Inicialmente, o caroço da estrela não está suficientemente quente para que a fusão do hélio possa ocorrer. Sem uma fonte de energia, o caroço não pode resistir ao colapso gravitacional e começa a desmoronar. A medida que ele colapsa, a sua temperatura aumenta. Este calor é transferido à uma fina camada de Hidrogênio ao redor do caroço que ao ter a sua temperatura aumentada provoca a fusão do Hidrogênio. Como o caroço continua a colapsar a temperatura na camada onde o Hidrogênio está se fundindo continua a aumentar e assim, a luminosidade e a pressão aumentam. A estrela inteira está fora do equilíbrio. O colapso do caroço acontece porque a gravidade excede a pressão. O colapso também é ajudado pela pressão que a camada de Hidrogênio exerce, e com sua temperatura sempre crescente (devido à transferência de calor do caroço colapsante) faz pressão suficiente para as camadas mais externas da estrela que se expandem. Ao se expandirem elas esfriam. Assim, a evolução de estrela na fase de Pós-Sequência Principal é definida por dois atributos externos que são manifestações de mudanças internas:

Expansão e resfriamento do envoltório. A estrela fica mais vermelha;

O aumento da luminosidade da estrela devido ao aumento da temperatura da camada de hidrogênio.

Este desequilíbrio continuará até que a estrela ache novamente uma fonte de geração de energia para o caroço.

Como vimos, nos primeiros estágios da evolução de uma estrela a geração de energia em seu centro é obtida através da transformação de hidrogênio em hélio. Para estrelas com massas de cerca de 10 vezes a do Sol isto continua por aproximadamente dez milhões de anos. Depois deste tempo, todo o hidrogênio no centro da estrela é exaurido e ele continua a queimar apenas em uma camada ao redor do caroço de hélio. O caroço contrai sob ação da gravidade até sua temperatura ser alta o bastante para a queima do hélio obtendo carbono e oxigênio. A fase da queima do hélio também dura aproximadamente um milhão de anos até ser exaurido no centro da estrela, e como o hidrogênio, continua a ser queimado numa camada ao redor do caroço de carbono e oxigênio, que por sua vez contrai até ficar quente o bastante para a conversão de carbono em neônio, sódio e magnésio. Isto dura aproximadamente 10 mil anos. Este padrão é repetido e o neônio é convertido em oxigênio e magnésio (em aproximadamente 12 anos), oxigênio se transforma em silício e enxofre (aproximadamente 4 anos) e finalmente silício em ferro, em aproximadamente 7 dias.

1.3 O Limite de Chandrasekhar

A massa é o parâmetro crítico que permite que se possa estabelecer tanto a sequência evolutiva quanto o ponto final da vida ativa de uma estrela. Sabe-se que existem limites inferiores de massa para que cada etapa da queima de um dado elemento químico ocorra. Tais

limites são necessários para que o material contido no centro da estrela atinja a temperatura necessária para a ignição do combustível nuclear. Assim, cálculos recentes indicam que as massas mínimas necessárias para a queima do hidrogênio, do hélio, do carbono e do neônio são iguais a 0.08, 0.25, 1.06 e 1.37 M_{\odot} respectivamente [5].

As estrelas mais massivas são classificadas como estrelas da População I. São estrelas jovens porque, como queimam o combustível nuclear mais rapidamente, uma vez que a pressão interna e a temperatura são maiores numa estrela maior, ficam na Sequência Principal durante um período de tempo menor que as estrelas da População II, pouco massivas e velhas pois apresentam processos evolutivos mais lentos. Como o tempo necessário para a queima do combustível nuclear é diretamente proporcional à razão M/L , onde M é a massa e L é a luminosidade da estrela, vemos que as estrelas da População I são mais luminosas do que as da População II, como mostra a Tabela 1.1.

Tabela 1.1 Temperatura Central T_c , densidade central ρ_c e escala de tempo para várias fases evolutivas de duas estrelas, uma de 25 M_{\odot} e outra de 1 M_{\odot} . Adaptado da ref.[3]

Fase	T_c (25) (keV)	T_c (1) (keV)	ρ_c (25) (g/cm³)	ρ_c (1) (g/cm³)	Tempo(25) (anos)	Tempo (1) (anos)
Queima do H	5	2.5	5	100	2×10^6	10^{10}
Queima do He	20	10	700	4×10^4	5×10^5	10^8
Queima do C	80	—	2×10^5	—	60	—
Queima do Ne	150	—	4×10^6	—	1	—
Queima do O	200	—	1×10^7	—	0.5	—
Queima do Si	350	—	3×10^7	—	0.01	—
Colapso	600	—	3×10^9	—	1×10^{-6}	—

Existem dois aspectos importantes na evolução estelar que estão fortemente relacionados com a massa da estrela: o tempo gasto nos ciclos de reações nucleares e o aparecimento de matéria degenerada no núcleo. Justamente por serem pouco massivas, as estrelas da população II tendem a atingir um estado degenerado mais rapidamente do que as estrelas mais massivas. Isto se deve ao fato de que estrelas menos massivas conseguem atingir densidades relativamente maiores, tendendo a desenvolver logo um caroço denso e degenerado. Para elas, a degenerescência é um fator determinante ao longo de quase toda a sua vida evolutiva, e pode ocorrer no início da Sequência Principal.

A pressão gravitacional em cada ponto no interior da estrela é proporcional a $M^{2/3} \rho^{4/3}$ se os elétrons estiverem no regime ultra-relativístico de energia - $\rho \gg 10^6 \text{ g/cm}^3$. Se o gás de elétrons for não relativístico, a pressão hidrostática será sempre suficiente para contrabalançar a pressão exercida pela força gravitacional, permitindo assim uma configuração de equilíbrio, qualquer que seja o valor da massa da estrela. Entretanto, se o gás de elétrons for extremamente relativístico, passa a existir um limite superior de massa para que a pressão hidrostática consiga evitar a contração gravitacional do sistema. Este limite foi estabelecido por Chandrasekhar [6]. Ele mostrou que existe um limite para a pressão que a repulsão mútua

entre os elétrons pode suportar. A medida que a estrela contrai, a energia gravitacional aumenta, mas a energia dos elétrons também, aumentando a sua pressão. O equilíbrio é possível apenas se a massa for menor que um valor crítico. Se a massa for maior que esse valor, a estrela colapsa.

O valor desse limite depende do número relativo dos elétrons e dos nucleons. Quanto maior a proporção dos elétrons, maior a pressão eletrônica, e maior é a massa limite. A dependência do limite de Chandrasekhar com a composição química da estrela está inteiramente embutida no peso molecular médio por elétron, μ_e . Assim, para uma estrela composta de núcleos relativamente leves, para os quais $\mu_e \sim 2$, temos que

$$M_{Ch} \approx 1.46 M_{\odot} \quad (1.7)$$

Para um caroço totalmente sintetizado a ^{56}Fe , como se presume existir nos instantes que precedem o colapso gravitacional de uma gigante vermelha, $M_{Ch} \approx 1.24 M_{\odot}$.

As estrelas mais massivas têm um destino catastrófico. Quando o combustível nuclear se exaure, a força gravitacional torna-se grande demais para ser mantida pela pressão de degenerescência dos elétrons e a estrela colapsa até que em densidades muito maiores os elétrons e os prótons se combinam para formar nêutrons que se degeneram. Se a pressão de degenerescência dos nêutrons for suficiente para parar o colapso, dá-se então a formação de uma estrela de nêutrons.

1.4 As Anãs Brancas

Se ao sair da Sequência Principal, a massa da estrela for menor que o limite de Chandrasekhar, a estrela continua a colapsar, até que a matéria fica tão compacta que se transforma em matéria degenerada, ou seja, com todos os níveis energéticos ocupados, o que resulta em uma pressão que incorpora um efeito quântico. Não há uma relação de dependência com a temperatura, como ocorre com a pressão normal de um gás. As primeiras partículas a serem afetadas são os elétrons que, ao se degenerarem passam a exercer uma pressão maior de dentro para fora, resistindo a qualquer acréscimo de pressão. Quando o núcleo estelar atinge um estado no qual ele é mantido pela pressão dos elétrons degenerados, a estrela torna-se uma anã branca. Ela é branca por ser inicialmente muito quente, em razão da enorme compressão. A sua densidade central é de aproximadamente 10^6 g/cm^3 e raio de 5000 km. Embora chamadas anãs brancas, essas estrelas na verdade cobrem um intervalo de temperatura e cores que abrange desde as mais quentes, azuis ou brancas e com temperatura superficial de até 170000 K, até as mais frias, vermelhas, com temperaturas superficiais de apenas 3500 K.

Não existindo condições termodinâmicas que permitam que a fusão do hélio, abundante no caroço, entre em operação, gradualmente a estrela esfria e desaparece de vista em alguns bilhões de anos, tornando-se um objeto denso, frio e sem qualquer atividade, uma anã negra. O tempo que uma estrela gasta nesse estágio depende fortemente da sua composição química e da sua temperatura central ao sair da Sequência Principal. Para uma configuração típica esse período pode durar 10^9 anos.

1.5 As Gigantes Vermelhas

Se ao sair da Sequência Principal, a massa da estrela for maior que o limite de Chandrasekhar, a pressão do gás de elétrons não será suficiente para impedir a contração gravitacional do caroço. A temperatura chega então a 10^8 K e a densidade a 10^6 g/cm³. Viabiliza-se então a fusão termonuclear do hélio no caroço, enquanto o hidrogênio continua a ser queimado na envoltória da estrela.

A fusão do hélio ocorre através da chamada reação 3- α , que em notação compacta se escreve



cuja energia média liberada é aproximadamente igual a 7,65 MeV. Esta reação ocorre em dois estágios, a saber: primeiramente duas partículas alfa combinam-se durante um intervalo de tempo muito curto ($\approx 10^{-16}$ s) para formarem o núcleo do isótopo ^8Be , que é muito instável,



Mas que, devido às condições existentes no meio, pode interagir com uma partícula alfa,



Após ter sido produzida uma quantidade suficiente de carbono, o hélio poderá ser consumido através de outra reação, dada por:



com a qual começa a ser sintetizado o oxigênio.

Terminado o ciclo da queima do hélio no núcleo da estrela, composto agora basicamente de carbono e oxigênio, ocorre uma nova contração das camadas centrais enquanto o envoltório se expande. Com a queda da temperatura, cessa também a queima do hidrogênio nas camadas mais externas. Naturalmente, o próximo ciclo será a queima do carbono e do oxigênio disponível no caroço da estrela, caso a massa do caroço seja maior que o correspondente limite de Chandrasekhar. A fusão do carbono se realiza através de uma das seguintes reações:



Quanto ao oxigênio, ele pode ser queimado através das reações:



onde o ^{28}Si aparece como o principal núcleo sintetizado. Por sua vez, este núcleo pode participar da seguinte reação fotonuclear:



A partir da queima do silício, irão se processar outras reações termonucleares cujo resultado final será a síntese de núcleos cada vez mais pesados, até que sejam sintetizados os elementos químicos pertencentes ao chamado *grupo do ferro*. Como se sabe, dos elementos conhecidos da tabela periódica, o ^{56}Fe é o elemento que possui a máxima energia de ligação por nucleon, sendo por isso, o elemento mais estável. Qualquer processo de fusão que inclua o ^{56}Fe é endotérmico. Deste ponto em diante, encerram-se os ciclos de reações termonucleares no interior da estrela.

Ao final deste estágio de evolução, a estrela está com uma estrutura de camadas, mais comumente chamada de estrutura de cebola onde há um caroço extremamente quente e denso, todo sintetizado a ^{56}Fe , envolvido por outras camadas menos densas e compostas por núcleos mais leves onde, provavelmente, prosseguem as reações nucleares. Na Fig.1.2, representamos ilustrativamente a configuração final da estrela.

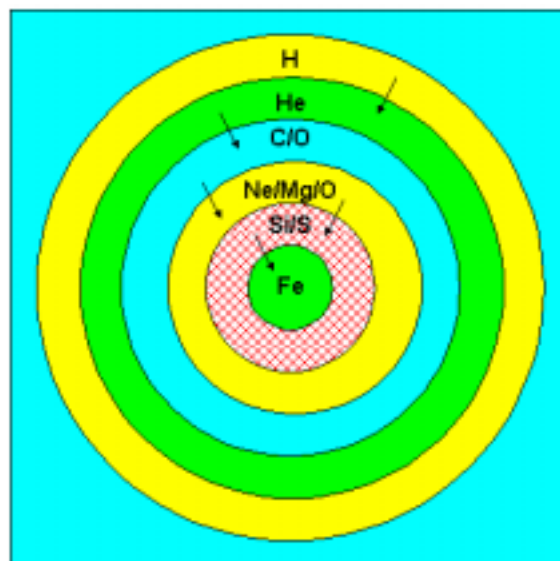


Figura 1.2- Estrutura de camadas, ou de cebola, de uma estrela no estágio de pré supernova. O centro da estrela apresenta um caroço denso de ferro com massa em torno de $1,24 M_{\odot}$

1.6 Nucleossíntese dos Elementos Pesados

A nucleossíntese dos elementos químicos até o grupo do ferro tem a sua origem determinada pelas reações termonucleares presentes no interior estelar. Contudo, a fusão do ferro é inviável por causa da grande barreira coulombiana a ser vencida, o que exigiria temperaturas superiores a 5×10^9 K para a matéria estelar. Entretanto, nessa temperatura, a fotodesintegração dos núcleos é mais provável do que a fusão. Como explicar então a abundância de elementos mais pesados do que o ferro? A idéia mais aceita é a de que esses núcleos seriam formados através de três processos básicos: a captura lenta de nêutrons - *processo s*, a captura rápida de nêutrons - *processo r* e a captura de prótons - *processo p*.

A baixas temperaturas, os núcleos podem capturar nêutrons durante dois estágios de evolução: na fase de gigante vermelha, através do processo *s* e durante a explosão de supernova, através do processo *r*.

O processo s: Núcleos pesados podem capturar nêutrons livres de baixas energias, produzidos pelo grupo de reações (1.8.5) e (1.8.6), através da reação



favorecida pelo fato de não envolver nenhuma barreira coulombiana a ser vencida. Se o núcleo $(Z, A + 1)$ resultante for estável contra o decaimento β ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$), ele poderá eventualmente capturar mais nêutrons, se tornando um isótopo cada vez mais rico em nêutrons. Se ele não for estável, haverá uma competição entre o decaimento β e a captura de nêutrons. No entanto, para que ocorra o processo *s*, é necessário que a taxa de captura de nêutrons seja muito menor que a do decaimento β .

O processo r: Se no meio houver um fluxo intenso de nêutrons, entre 10^{22} e 10^{26} nêutrons/cm².s, a captura de nêutrons pode ser mais rápida que o decaimento β . Nesse contexto, o núcleo segue capturando nêutrons, um de cada vez, até que a energia de separação de um nêutron (S_n) se torne tão baixa que ele não pode mais capturá-los. O núcleo, rico em nêutrons, sofre sucessivos decaimentos β , tornando-se assim mais rico em prótons. Quando valores muito grandes de A forem atingidos, o processo *r* passará a competir com o processo de fissão dos núcleos formados. Para que a formação de núcleos pesados através do processo *r* ocorra é necessário, além da presença de um fluxo intenso de nêutrons, que a temperatura seja suficientemente baixa de modo que os núcleos formados não sejam desintegrados. Este processo ocorre durante a explosão de supernova. A onda de choque gerada durante a explosão, ao atravessar as camadas mais externas e frias da estrela, libera uma grande quantidade de nêutrons que podem ser capturados pelos núcleos.

O processo p: A síntese dos núcleos ricos em prótons ocorre mediante o processo *p*, através da reação



A baixa abundância relativa desses núcleos refletiria a baixa presença de prótons na matéria estelar, causada pela captura eletrônica.

1.7 A Implosão

Quando a fonte de energia nuclear é interrompida, o caroço da estrela se contrai, usando a energia gravitacional disponível. Com a contração, toda a estrutura evolui rapidamente para uma configuração altamente instável, desencadeando reações ultra-rápidas. Com a temperatura da ordem de 10^9 K e densidade aproximada de 10^9 g/cm³, o sistema caminha rapidamente para o colapso gravitacional. É o começo do fim para a estrela. Esta é a configuração de pré supernova. A partir de então, passam a ocorrer processos fortemente endotérmicos, como a fotodissociação do ⁵⁶Fe e a captura eletrônica, levando a uma brusca redução da pressão e da energia térmica do gás de elétrons. Como consequência, o equilíbrio hidrostático é rompido e as regiões centrais da estrela que compõem o caroço de ferro, entram em colapso gravitacional, ou seja, implodem.

Quando a escala de tempo da contração do sistema é da mesma ordem de grandeza do tempo de queda livre, ou tempo dinâmico (qualquer desequilíbrio da condição de equilíbrio hidrostático causa deslocamentos grandes e rápidos) dizemos que o sistema está em colapso gravitacional. Portanto, uma falta de equilíbrio leva a mudanças significativas no raio da estrela.

A escala de tempo de queda livre para um caroço esférico de massa M e raio R é dada por

$$t_{gl} \approx \left[\frac{2R^3}{GM} \right]^{1/2} \quad (1.11)$$

Para um caroço típico de supernova com $M=1.5M_{\odot}$ e $R=10^8$ cm, encontramos $t_{gl} = 50$ ms.

Durante o colapso gravitacional, a matéria estelar torna-se cada vez mais densa. Elétrons e prótons se combinam e formam nêutrons degenerados. A matéria estelar torna-se então rica em nêutrons. As camadas centrais implodem em frações de segundo com velocidades características de queda livre do sistema. Nestas condições catastróficas, a equação de estado que descreve o sistema passa a depender essencialmente da densidade.

Espera-se que o caroço da estrela ao ser comprimido, tenha a sua temperatura aumentada, e que conseqüentemente, a pressão também aumente e pare o colapso. Mas na verdade, o aquecimento do caroço causa um efeito contrário. A pressão é determinada por dois fatores: o número de partículas no sistema (independente do tamanho) e a sua energia média. No caroço da estrela, tanto os núcleos como os elétrons contribuem para a pressão, mas a contribuição eletrônica é maior. Quando o caroço é aquecido, uma pequena parte dos núcleos de ferro é quebrada em núcleos menores, aumentando o número de partículas nucleares e conseqüentemente aumentando a componente nuclear da pressão. Entretanto, a quebra dos núcleos absorve energia fornecida por fótons cuja energia média é de 200 keV. Dado que existe uma distribuição de fótons, são os fótons mais energéticos da cauda dessa distribuição que começam, de fato, a dissociar o ferro ($\gamma + {}^{56}\text{Fe} \rightarrow 13\alpha + 4n$). Isto ocasiona uma pequena despressurização que comprime o material um pouco mais. Com isso, a densidade do meio e conseqüentemente a energia de Fermi dos elétrons aumenta. A energia cinética desses elétrons chega a 0.6 MeV que permite o desencadear da captura eletrônica por núcleos do caroço. Devido a isto, o termo dominante de pressão fica enfraquecido e a contração se acelera. Neste ponto estamos com uma densidade de 10^8 g/cm³. A contração se acelera e muitos neutrinos escapam. Como consequência desses fatos, o caroço neutroniza-se: os núcleos ficam ricos em nêutrons a tal ponto que os mesmos se soltam e proliferam no

meio. Chega um ponto em que são os nêutrons livres, ao invés dos elétrons que seguram a estrutura da estrela, o que está descrito pela equação de estado BBP [7]. A partir deste ponto, a densidade de 10^{11} g/cm^3 é atingida, os neutrinos ficam confinados e o colapso é invertido. A perda na pressão eletrônica é mais importante que o ganho na pressão nuclear, e o colapso acelera [8].

Pode parecer que a implosão de uma estrela seja um processo caótico. Na verdade ele é bastante ordenado. Uma estrela colapsante evolui para um estado de menor entropia. Afinal, ela está implodindo e não explodindo. Numa estrela de hidrogênio, cada nucleon tem o seu próprio movimento, enquanto que, num caroço de ferro grupos de 56 nucleons estão unidos e têm que se movimentar juntos. A baixa entropia do caroço é mantida durante o colapso. As reações nucleares continuamente mudam as espécies de núcleos presentes, mas estas reações são tão rápidas, que o equilíbrio é mantido. O colapso ocorre em alguns milissegundos enquanto as reações nucleares ocorrem num intervalo de tempo da ordem de 10^{-15} a 10^{-23} segundos, de modo que qualquer saída do equilíbrio é imediatamente corrigida.

O primeiro estágio no colapso da supernova termina quando a densidade do caroço chega a $4 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Esse valor marca uma mudança crucial nas propriedades físicas da matéria. Ela se torna opaca aos neutrinos. Vale lembrar que os neutrinos são partículas que não interagem com outras, mas até eles são confinados neste caroço tão denso. Esta situação não é permanente. Depois do neutrino ser espalhado, absorvido e reemitido muitas vezes, ele acaba escapando, mas este processo dura mais do que os outros estágios do colapso, e durante o confinamento dos neutrinos, nenhuma energia escapa do caroço.

O processo de captura eletrônica reduz não apenas a pressão eletrônica, mas também a razão elétrons/nucleons. Como vimos, esta quantidade faz parte do cálculo da massa limite de Chandrasekhar. Num caroço típico de pré-supernova, essa razão fica entre 0.42 e 0.46. Quando os neutrinos são confinados, ela cai para 0.39 o que lava a uma massa de Chandrasekhar de $0.88 M_{\odot}$, valor bem menor do que o valor original.

Neste ponto, o papel da massa de Chandrasekhar na análise de supernovas muda. Ela significava a maior massa que a pressão eletrônica poderia suportar e se tornou a maior massa que pode colapsar de uma maneira homóloga, ou seja, em conjunto, preservando a sua forma original. O trabalho de Chandrasekhar mostrou que a pressão dos elétrons não impede que o caroço de uma estrela grande colapse. A única esperança de parar o colapso seria a pressão dos nucleons, que no estágio de pré-supernova, é uma fração desprezível da pressão eletrônica.

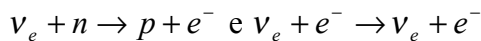
A situação não muda até que a densidade na parte central do caroço atinja valores em torno de $2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ e temperatura em torno de 10^{10} K. Na verdade, os nucleons no caroço se unem para formar um único núcleo gigante. Como a matéria nuclear é praticamente incompressível, assim que a parte central do caroço atinge tais densidades, ele passa a resistir ao colapso. Essa resistência é a primeira fonte de uma onda de choque que transforma o colapso gravitacional em uma explosão espetacular.

A questão básica é: uma supernova começa como um colapso. Em algum ponto o movimento para dentro da matéria estelar é parado e invertido. Ou seja, uma implosão se transforma em uma explosão.

1.8 O Confinamento de Neutrinos

Neutrinos são produzidos em todas as fases evolutivas das estrelas. Entretanto eles podem escapar livremente delas sem sofrer interação devido às baixas seções de choque (10^{-44} cm^2). O livre caminho médio para neutrinos de 1 MeV de energia é maior do que o raio de uma estrela, mesmo uma gigante vermelha.

Entretanto, em 1966, Colgate e White [9] levantaram a hipótese de que, nos instantes finais do colapso gravitacional de uma estrela massiva, as suas camadas externas ao caroço central pudessem ficar opacas aos neutrinos devido à formação, nestas camadas, de núcleos com número de massa elevado. Os autores supunham que os neutrinos produzidos pela captura eletrônica pudessem escapar livremente do caroço estelar porque as taxas das reações

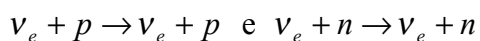


deveriam diminuir progressivamente com o aumento da densidade devido ao princípio de exclusão de Pauli. No entanto, a densidade das camadas externas ao caroço é baixa, e lá, estas reações são possíveis. Portanto, devido a maior opacidade das camadas externas aos neutrinos, ocorreria uma transferência de energia tanto pelas reações de espalhamento como pela absorção de neutrinos por núcleos. Tal energia transferida seria transportada para as camadas externas em forma de calor, levando o caroço a esfriar e a envoltória a se aquecer. Com o aumento da temperatura, a pressão do gás aumentaria e este gradiente de pressão, gerando uma onda de choque, poderia ocasionar uma explosão.

O trabalho de Colgate e White tem grande importância porque foi a primeira tentativa de simulação de um colapso gravitacional e de uma explosão de supernova em computadores eletrônicos. Este trabalho trouxe um grande impulso à pesquisa em física de supernovas e muitos cálculos baseados em transporte de energia e momento por neutrinos foram desenvolvidos, até que, em 1974, Freedman [10] propôs a existência de correntes neutras em interações fracas, mediadas pelo bóson Z^0 , o que foi confirmado experimentalmente. Com isso, os rumos da pesquisa em supernovas mudaram drasticamente, principalmente pelo fato de que tais processos contribuem para a opacidade da matéria estelar a neutrinos.

Em 1975, Sato [11] e em 1976, Mazurek [12] mostraram que a matéria estelar torna-se fortemente opaca aos neutrinos durante a captura eletrônica, e que o processo de neutronização (elétrons livres relativísticos são capturados por prótons nos núcleos e são transmutados em nêutrons numa reação inversa ao decaimento β), fica fortemente inibido tanto pelo mar degenerado de neutrinos confinados, quanto pela captura de neutrinos por núcleos. Epstein e Pethick [13] determinaram o valor crítico de densidade para o confinamento de neutrinos, considerando os espalhamentos neutrino-próton, neutrino-nêutron e neutrino-núcleo. Compararam o tempo gasto por um neutrino para escapar por difusão do caroço com o tempo característico de queda livre, e mostraram que o confinamento dos neutrinos no interior da estrela ocorre para densidades da ordem de $10^{11} - 10^{12} \text{ g/cm}^3$, se forem considerados neutrinos com energias maiores que 10 MeV.

Reações de corrente neutra, como:



apresentam taxas de reação similares às reações induzidas por correntes com carga. Entretanto, uma diferença fundamental é que, no meio estelar, as taxas de reação com corrente

neutra crescem com a densidade, pelo fato de não existirem elétrons nos estados finais. Além disso, as seções de choque para os processos de espalhamento coerente de neutrinos por núcleos são bem maiores do que as seções de choque típicas, pois são proporcionais à A^2 , onde A é o número de massa dos núcleos. Consequentemente, para núcleos com número de massa elevado, presentes nas regiões centrais da estrela nos instantes finais do colapso, o espalhamento coerente neutrino – núcleo deve ser a principal fonte de opacidade a neutrinos, o que pode levá-los a ficar confinados no caroço da estrela.

Para ilustrar o que foi escrito acima, consideraremos o espalhamento coerente de neutrinos por núcleos de ^{56}Fe . A seção de choque para o espalhamento neutrino-núcleo [14] é dada por

$$\sigma \approx \frac{\sigma_0}{16} \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 A^2, \quad (1.13)$$

onde a seção de choque elementar σ_0 é

$$\sigma_0 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\hbar}{m_e c^2} \right)^4 \left(\frac{G_F}{m_e c^2} \right)^2, \text{ onde } G_F \text{ é a constante de Fermi.} \quad (1.14)$$

Vemos da equação acima que a seção de choque fica igual a A^2 vezes a seção de choque elementar entre o neutrino e um nucleon individual. Esse fator de elevação da seção de choque, combinado com as elevadas densidades alcançadas durante o colapso gravitacional, leva a um livre caminho médio para os neutrinos incrivelmente menor do que os estimados para as demais reações.

Adotando-se o valor $G_F = 10^{-5} m_p^{-2}$ para a constante de Fermi, onde m_p é a massa do próton, obtém-se $\sigma_0 = 1.67 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$. Por exemplo, para neutrinos com energia igual a 20 MeV e $A=56$, obtemos uma seção de choque total da ordem de 10^{-38} cm^2 .

Vamos estimar então, o valor do livre caminho médio dos neutrinos para um caroço de ^{56}Fe com densidade de massa igual a 10^{11} g/cm^3 e raio de 1000 km. O número de núcleos de ^{56}Fe por unidade de volume (n_N) é, então, da ordem de 10^{33} cm^{-3} e o livre caminho médio, $\lambda = 1/n_N \sigma$, igual a 1km. O número de colisões sofridas por cada neutrino (N) é dado por $D = \lambda \sqrt{N}$, onde D é a distância efetiva percorrida pelos neutrinos. Por outro lado, o tempo necessário para que os neutrinos escapem do caroço é $t = \lambda N / c$. Fazendo $D = 1000 \text{ km}$, obtemos $t \approx 3.0 \text{ s}$. Notem que este valor é muito maior do que a escala de tempo característica do colapso gravitacional, que é da ordem de 0.1 s, mostrando que durante o colapso gravitacional os neutrinos ficam efetivamente confinados no caroço, para densidades maiores que 10^{11} g/cm^3 .

Uma consequência teórica imediata que o confinamento de neutrinos acarreta, é a impossibilidade de se explicar a explosão de supernova com base no mecanismo de transporte de momento ou energia por neutrinos, como tentaram Colgate e White, já que os neutrinos ficam presos no interior do caroço durante o colapso gravitacional da estrela.

1.9 A Explosão

Dentre os mecanismos que podem provocar uma explosão de supernova, o *bounce* hidrodinâmico, proposto em 1960 por Colgate e Johnson [15], em 1975 por Bruenn [16] e em 1979 por Bethe *et.al* [17], será por nós considerado. Nos instantes finais do colapso, o caroço da estrela inverte repentinamente o sentido do movimento (*bounce*), ao mesmo tempo em que as camadas externas próximas ao caroço, em movimento praticamente de queda livre, colidem violentamente com ele, sendo então refletidas. A onda de choque gerada durante o choque pode, eventualmente, ejetar as camadas externas inicialmente em colapso, juntamente com o restante da estrutura da estrela. Se a dinâmica do colapso respeitar a simetria esférica, a aceleração por unidade de massa será dada por:

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2} + \frac{F\mathbf{k}_v}{c} \quad (1.15)$$

onde F representa o fluxo de energia dos neutrinos, \mathbf{k}_v a opacidade do meio aos neutrinos e c a velocidade da luz. Na ausência de transporte de neutrinos, ela torna-se:

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2}$$

O sinal da aceleração em cada ponto do fluido depende da competição entre o termo dado pelo gradiente de pressão hidrostática e o termo dado pela força gravitacional. Ocorrerá um *bounce* se o primeiro termo for maior que o segundo, o que poderá levar o caroço a oscilar. Portanto, dependendo do comportamento da equação de estado, o gradiente de pressão pode se tornar muito maior que o termo gravitacional, de modo que o próximo *bounce* possa gerar uma forte onda de choque. Nos instantes finais do colapso, o índice adiabático muda subitamente de um valor menor que $4/3$ para um valor maior que $5/3$ (Apêndice B). Com isso, a equação de estado se torna mais mole, propiciando o *bounce*. Em outras palavras, o gradiente de pressão aumenta consideravelmente.

Detalhando mais, o caroço colapsa de maneira uniforme, e o que provoca isso é o fato da velocidade de queda livre da matéria ser proporcional à distância ao centro. Por outro lado, a densidade é inversamente proporcional à distância ao centro, e como consequência, o mesmo acontece com a velocidade do som. O raio para o qual a velocidade do som é igual à velocidade de queda livre da matéria é chamado de ponto sônico, e marca a fronteira do caroço homólogo. Uma perturbação dentro do caroço não causa nenhuma reação além desse ponto. No ponto sônico, ondas de som movem-se radialmente para fora em relação ao referencial da matéria em queda, que se move radialmente para dentro com a mesma velocidade, de modo que as ondas ficam paradas em relação ao centro da estrela.

Quando o centro do caroço alcança a densidade nuclear, ele para de se contrair subitamente. Isto cria ondas sonoras que se propagam através do caroço. Essas ondas são atenuadas a medida que elas se propagam para fora do caroço homólogo devido à diminuição da velocidade do som e também porque elas se movem contra uma massa que está colapsando muito rapidamente. No ponto sônico elas param completamente. Mas outras ondas de choque são geradas, e por uma fração de milissegundos essas ondas se encontram no ponto sônico, aumentando a pressão lá. Esse impacto na pressão atenua a massa que cai através do ponto sônico criando uma descontinuidade na velocidade. Essa mudança descontínua da velocidade constitui uma onda de choque.

Na superfície do caroço duro o colapso para subitamente, mas não instantaneamente. A compressibilidade da matéria nuclear é baixa, mas não é nula, e o colapso continua até além do ponto de equilíbrio, comprimindo o caroço central até uma densidade mais alta do que a densidade nuclear. A esfera de matéria nuclear faz um *bounce* como uma bola de borracha quando comprimida. O *bounce* causa mais ondas de choque, que se associam àquelas no ponto sônico.

Uma onda de choque é diferente de uma onda sonora. Uma onda sonora não causa mudança permanente no meio. A passagem de uma onda de choque causa mudanças na densidade, pressão e entropia. Uma onda de som se move com a velocidade do som. Uma onda de choque se move mais rápido, com uma velocidade determinada pela sua energia. Logo, uma vez que a descontinuidade da pressão no ponto sônico se transforma numa onda de choque, ela não fica mais presa no lugar pela massa que cai. A onda se propaga para fora através das camadas mais externas da estrela, e, de acordo com simulações computacionais, com velocidades entre 30 mil e 50 mil km/s. Ela alcança a superfície do caroço de ferro em uma fração de segundo, e então, continuamente através das sucessivas camadas da estrela. Após alguns dias ela chega à superfície externa da estrela e sai numa violenta explosão. Além de um determinado raio, chamado de ponto de bifurcação, todo o material da estrela é ejetado, e o que sobra dentro desse raio pode condensar em uma estrela de nêutrons.

1.10 As Supernovas e as Estrelas de Nêutrons

Já foram registrados em nossa galáxia seis eventos de explosão de supernovas, sendo que a explosão mais célebre foi a que resultou na Nebulosa de Caranguejo, na Constelação de Touro, observada pelos chineses em 1054, e em cujo centro está o pulsar de Caranguejo.

Há várias classes de supernovas, sendo as mais importantes as do tipo I (SNI) e as do tipo II (SNII). As supernovas do tipo I são o resultado da transferência de massa em um sistema binário formado por uma anã branca e uma estrela gigante em evolução. Supernovas do tipo II são em geral, estrelas volumosas que chegam ao fim da vida de forma espetacular. Fundamentalmente, o que distingue uma classe da outra são a curva de luz, o intervalo de massa para a estrela progenitora e o mecanismo de explosão.

Uma SNI gasta aproximadamente 50 dias para atingir seu brilho máximo, tendo como principal característica a regularidade da sua curva de luz e a ausência de linhas de hidrogênio. Existem evidências observacionais de que as SNI's estejam associadas a estrelas binárias [18]. O par de estrelas perde momento angular até que elas se tornam tão próximas que a matéria da estrela companheira é transferida para um disco ao redor da anã branca que consequentemente, tem a sua massa aumentada até o limite de Chandrasekhar. A anã branca consiste basicamente de carbono e oxigênio. Neste processo, carbono (ou possivelmente hélio) é usado como estopim sob condições altamente degeneradas e uma parte substancial da estrela é queimada até o equilíbrio nuclear. Podemos acrescentar ainda que não há registro de nenhuma estrela de nêutrons que seja remanescente da explosão de uma SNI [19]. Presume-se também que as SNI's tenham como progenitoras estrelas velhas, isto é, estrelas da População II, e pouco massivas, cujo intervalo de massa é $4M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$.

As SNII's apresentam curvas de luz irregulares, linhas fortes de hidrogênio e são, pelo que se acredita, resultado final da evolução de estrelas da População I, mais massivas, com $8M_{\odot} \leq M \leq 60M_{\odot}$. Elas existem apenas nos braços de galáxias espirais. Após passarem por vários ciclos de nucleossíntese, tais estrelas entram em colapso gravitacional e explodem violentamente, deixando como resultado um caroço denso e rico em nêutrons que pode,

dependendo do valor da sua massa, atingir uma configuração dinamicamente estável: uma estrela de nêutrons.

Para melhor explicar como uma supernova do tipo II evolui, é melhor começarmos pelo momento em que ocorre a fusão do silício para formar o ferro no centro da estrela. Nesse ponto, a estrela já passou pelos estágios de queima do hidrogênio, hélio, neônio, carbono e oxigênio e já tem a estrutura tipo “cebola” descrita anteriormente. A estrela gasta vários milhões de anos para chegar a este estágio de evolução O que vem a seguir ocorre muito mais rapidamente.

Quando as fusões finais começam, um caroço de ferro e alguns outros elementos começa a se formar no centro da estrela, com um envoltório de silício. A fusão continua na interface entre o caroço e o envoltório adicionando massa ao caroço. Entretanto, no caroço não há mais produção de energia através de reações nucleares. O caroço se torna uma esfera inerte sob grande pressão. Ele pode resistir à contração apenas com a pressão dos elétrons, que está sujeita ao limite de Chandrasekhar, que para um caroço de ferro é algo entre 1.2 e 1.5 massas solares. Todo o processo descrito acima, ou seja, desde a fusão do silício até o caroço alcançar o limite de Chandrasekhar ocorre em apenas um dia. E o caroço que foi feito em um dia colapsa em alguns milissegundos.

A morte de uma estrela grande é um evento único. A estrela evolui calmamente durante milhões de anos, passando por vários estágios de desenvolvimento, mas quando o seu combustível acaba, ela colapsa devido ao seu próprio peso em menos de um segundo. O produto disso é uma supernova, uma explosão poderosa, que pode brilhar mais do que uma galáxia inteira com bilhões de estrelas. A explosão de uma supernova é um dos eventos mais violentos que ocorrem naturalmente no universo. Ao longo de poucos meses ela emite a mesma quantidade de luz que o Sol emite em um bilhão de anos. A energia liberada pelo colapso expelle a maior parte da massa da estrela, espalhando os elementos químicos formados durante a sua evolução pelo espaço interestelar. Massas da ordem de várias massas solares são ejetadas com velocidades de mais de 10000 km/s. Quando a explosão acaba, o que sobra no centro é uma estrela de nêutrons ou, em alguns casos, um buraco negro.

O conceito de estrelas de nêutrons data de 1930, e foi primeiramente discutido no contexto da relatividade geral por Oppenheimer [20] em 1939, porém elas não foram observadas até 1968 quando Gold [21] sugeriu que os pulsares seriam estrelas de nêutrons fortemente magnetizadas, que giravam rapidamente. A primeira observação de um pulsar foi feita em 1967 por Hewish et al. [22]. A regularidade da emissão do pulsar é devida a um feixe de radiação da estrela que varre o céu durante cada período de rotação. O pulsar de Caranguejo, por exemplo, emite nas faixas de rádio, ótica e de raios-x, a intervalos regulares de aproximadamente 30 pulsos por segundo.

As estrelas de nêutrons são estrelas degeneradas com massa de aproximadamente uma massa solar, raio de aproximadamente 10 km e densidades centrais da ordem de 10^{14} g/cm^3 , mas a sua temperatura é baixa, da ordem de 10^8 K , o que é muito menos que um MeV. A energia de um nucleon é 50 a 100 vezes maior do que KT. A densidade no centro de uma estrela de nêutrons pode chegar a assumir valores maiores do que a densidade de saturação da matéria nuclear ($\rho_0 = 2.4 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ ou $0.15 \text{ nucleons/fm}^3$) e, por isso mesmo, contrariamente ao que ocorre no caso das anãs brancas, o limite superior de massa de uma estrela de nêutrons não está ainda bem estabelecido, uma vez que a equação de estado da matéria estelar quente, no regime supranuclear de densidade não é bem conhecida. Portanto, para que uma teoria de supernovas do Tipo II tenha sucesso, o primeiro requisito é que ela

tenha uma boa equação de estado tanto para densidades abaixo como para densidades acima da densidade nuclear.

O primeiro cálculo feito neste sentido foi realizado em 1939 por Oppenheimer e Volkoff [20]. Eles usaram a equação de estado de um gás ideal de nêutrons livres e uma equação de equilíbrio hidrostático com correções relativísticas e encontraram o valor limite de $3/4 M_{\odot}$ para a massa de uma estrela de nêutrons.

Mais recentemente Glendenning [23] através de uma equação de estado da QHD obteve o limite de $M \approx 1.81 M_{\odot}$ para uma estrela de nêutrons rica em hyperons, com raio de aproximadamente 11.3 km e densidade central de $2.4 \times 10^{15} \text{g/cm}^3$.

Um modelo simplificado [24] que usa o modelo de sacola apenas para nêutrons não interagentes permite obter um limite de $M \approx 1.80 M_{\odot}$, raio da ordem de 10 km e densidade central de $2.0 \times 10^{15} \text{g/cm}^3$, para uma estrela de nêutrons.

Nesse trabalho, consideraremos um modelo esquemático semi-analítico, que veremos em detalhe no Capítulo 3, para o cálculo dinâmico do colapso e da explosão de supernovas, que dará origem a formação e composição de proto-estrelas de nêutrons. A transição de fase de matéria hadrônica para matéria de quarks será vista num cenário onde ocorre o confinamento de neutrinos e onde as interações entre os hádrons e entre os quarks são consideradas. Este modelo, além de simples, fornece uma descrição quantitativa precisa de todos os aspectos globais do processo, tais como a massa ejetada, a energia da onda de choque, a massa e o raio do caroço remanescente. Apresentaremos também, uma evolução temporal do sistema durante o processo de colapso e explosão.

A Hadrodinâmica Quântica

2.1 Introdução

Em 1974 Walecka [1] propôs uma teoria quântica relativística de muitos corpos, a Hadrodinâmica Quântica, QHD (do inglês Quantum Hadro-Dynamics), com o objetivo de descrever autoconsistentemente a interação entre hádrons através da troca de mésons massivos não interagentes entre si.

Essa teoria alcançou grande sucesso devido ao fato dela descrever de forma bastante simples a energia de ligação da matéria nuclear como um efeito relativístico que “desliga” a atração produzindo um mínimo para a energia de ligação na energia e densidade corretas em contrapartida com modelos não relativísticos que precisavam de cálculos elaborados para dar conta desses números. No entanto, a compressibilidade da matéria nuclear obtida a partir dessa teoria é muito alta se comparada com a compressibilidade extraída de dados do “modo de respiração” – ressonância monopolar nuclear, muito importante para os estudos da evolução estelar. Portanto, modificações capazes de produzir uma descrição mais adequada da compressibilidade foram propostas. Dentre estas sugestões destaca-se a de Zimanyi e Moszkowsky [2] que modifica a interação entre o méson escalar σ e os bárions Ψ e introduz a interação entre o méson escalar σ e o vetorial isovetorial ω . Este será o modelo usado em nosso trabalho, mas antes, por questão de simplicidade, faremos uma breve apresentação do modelo de Walecka. Como é usual, consideraremos daqui por diante $\hbar = c = 1$.

2.2 O Modelo QHD-I

Considera-se um sistema de nucleons interagindo entre si através do campo escalar $\sigma(x_\mu)$ e do campo vetorial $\omega_\nu(x_\mu)$. O campo escalar descreve a parte atrativa da interação entre os nucleons, dominante em densidades intermediárias em comparação a ρ_0 , a densidade da matéria nuclear saturada, enquanto o campo vetorial descreve a parte repulsiva da interação, dominante em densidades elevadas.

Os graus de liberdade fundamentais em QHD são os campos bariônicos e os campos mesônicos. Assim, a interação entre os nucleons é descrita pelo acoplamento do campo bariônico Ψ com os campos mesônicos σ e ω , sendo mensurada pelos termos $g_v \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \omega^\mu$ e $g_s \bar{\Psi} \Psi \sigma$, onde g_v e g_s são as constantes de acoplamento vetorial e escalar, respectivamente. Nesta descrição, Ψ, σ e ω são operadores.

Nesse modelo, a lagrangiana é dada por [3]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w = & \bar{\Psi} \left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu) - (m_B - g_s \sigma) \right] \Psi + \\ & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_s^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_\mu \omega^\mu \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde m_B, m_v e m_s representam as massas dos nucleons, do méson vetorial e do méson escalar e γ_μ denota as matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

1 é a matriz identidade 2 x 2 e

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

são as matrizes de Pauli. O tensor antissimétrico $\omega_{\mu\nu}$ é definido por

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \quad (2.4)$$

O primeiro termo da Eq. (2.1) é a lagrangiana de Dirac para férmions livres acrescida da energia de interação com os mésons ω e σ . O segundo é a lagrangiana para bósons escalares livres e o terceiro e o quarto termos correspondem à lagrangiana de um campo vetorial massivo.

Partindo-se das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial L_I}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial L_I}{\partial q_i} = 0 \quad (2.5)$$

com $q_i = \sigma, \omega_\mu, \Psi$, pode-se obter as seguintes equações de movimento para os campos:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \sigma = g_s \bar{\Psi} \Psi, \quad (2.6)$$

$$\partial_\mu \omega^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu = g_v J_B^\nu, \quad (2.7)$$

$$\left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v \omega_\mu) - (m_B - g_s \sigma) \right] \Psi = 0 \quad (2.8)$$

onde em (2.7), o tensor

$$J_B^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.9)$$

é a corrente bariônica, sendo

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \text{ o conjugado de Dirac associado ao operador } \Psi. \quad (2.10)$$

Da equação (2.8) obtemos a seguinte equação para $\bar{\Psi}$:

$$\bar{\Psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu + g_v \omega_\mu) + (m_B - g_s \sigma)] = 0 \quad (2.11)$$

Multiplicando-se (2.8) à esquerda por $\bar{\Psi}$ e (2.11) à direita por Ψ e, a seguir somando-as, obtemos a equação

$$\partial_\mu J_B^\mu = 0 \quad (2.12)$$

que traduz a lei da conservação da corrente bariônica. Conseqüentemente, sendo $m_v \neq 0$, segue-se de (2.7) que $\partial_\mu \omega^\mu = 0$.

Em termos da densidade lagrangiana, o tensor energia-momento é usualmente definido por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathbb{L} + \sum_i \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)} \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \quad (2.13)$$

Substituindo-se (2.1) e (2.8) na equação anterior, obtemos:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\partial_\lambda \sigma \partial^\lambda \sigma + m_s^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \omega_{\lambda\sigma} \omega^{\lambda\sigma} - m_v^2 \omega_\lambda \omega^\lambda \right] g_{\mu\nu} \\ + i \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\mu \omega^\lambda \omega_{\lambda\nu} \quad (2.14)$$

Para um fluido uniforme, o valor médio do tensor $T_{\mu\nu}$ é dado por [4]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

onde ε é a densidade de energia do fluido, P a pressão e $u_\mu = (1, \mathbf{u})$ o quadri-vetor velocidade associado ao movimento do fluido. Portanto, para um fluido uniforme em repouso, as relações abaixo são verdadeiras:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (2.16)$$

e

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle \quad (2.17)$$

Assim, dada a lagrangiana de um sistema, podemos obter a equação de estado determinando o valor médio de $T^{\mu\nu}$. No presente caso, isto equivale a conhecer

primeiramente, as expressões para os campos $\Psi, \omega_\mu, e \sigma$ que satisfaçam às equações de movimento (2.6; 2.7; 2.8).

As equações de movimento formam um sistema de equações diferenciais acopladas e não lineares para os campos $\Psi, \omega_\mu, e \sigma$, cujas soluções exatas são de difícil obtenção. Uma solução aproximada, e em muitos casos bastante satisfatória, consiste em fazer uma aproximação de Campo Médio, em que se substitui os campos mesônicos nas equações de movimento por seus valores médios relativos ao estado fundamental do sistema:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle \equiv \sigma^0$$

$$\omega_\mu \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle \equiv \omega_\mu^0$$

Para um sistema uniforme, os campos σ^0 e ω_μ^0 são independentes de x_μ , e as respectivas equações de movimento admitem, nesse caso, as soluções:

$$\sigma^0 = \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s \quad (2.18)$$

$$\omega_0^0 = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B \quad (2.19a)$$

$$\omega_i^0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle J_{B,i} \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.19b)$$

O termo de fonte para o campo σ^0 médio, presente na equação (2.6), é a densidade escalar ρ_s , definida por

$$\rho_s \equiv \langle \overline{\Psi} \Psi \rangle_0 \quad (2.20)$$

Para o campo ω_μ^0 as fontes são a densidade bariônica volumétrica ρ_B

$$\rho_B \equiv \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle_0 \quad (2.21)$$

e os respectivos valores das componentes espaciais da corrente bariônica.

As soluções apresentadas para os campos mesônicos envolvem mésons massivos. Por outro lado, as fontes para os campos condensados dependem apenas do campo bariônico Ψ .

Da Eq.(2.21), vemos que N_B , o número total de bárions do sistema, é uma constante de movimento e é dado por:

$$N_B \equiv \int_V J_B^0 d^3x = \int_V \Psi^\dagger \Psi d^3x \quad (2.22)$$

Substituindo σ^0 e ω_μ^0 na Eq. (2.8), obtemos a equação de movimento para Ψ

$$\left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega_0^\mu) - m_B^* \right] \Psi = 0, \quad (2.23)$$

onde a equação

$$m_B^* = m_B - g_s \sigma_0 \quad (2.24)$$

define a massa efetiva dos nucleons, cuja solução discutiremos mais adiante.

Consideremos, em primeiro lugar, a solução de onda plana para a equação de Dirac (2.23), dada por:

$$\Psi(x, t) = u(k, \lambda) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \varepsilon(k)t)} \quad (2.25)$$

onde $u(k, \lambda)$ é o espinor de Dirac, k o momento e λ define o estado de spin. Substituindo-se a solução acima em (2.23), obtemos a seguinte equação de autovalores:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\beta} m_B^*) u(k, \lambda) = E^* u(k, \lambda) \quad (2.26)$$

onde

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \gamma^0, \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\gamma} \quad (\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)),$$

$$E^* = \varepsilon(k) - g_v \omega_0^0,$$

$$\mathbf{k}_i = k_i - g_v \omega_i^0$$

e o operador $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\beta} m_B^*$ é o hamiltoniano da partícula.

Observe que, sob a ação do campo médio σ_0 , os bárions respondem com a redução da sua massa efetiva, como vemos na Eq. (2.24) e que, por outro lado, o campo vetorial afeta a relação de dispersão da solução de onda plana, redefinindo o zero de energia e o momento \mathbf{k} da partícula.

A Equação (2.26) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} m_B^* - E^* & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -m_B^* - E^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u,$$

cujas soluções fornecem os autovalores de energia

$$\varepsilon_{\pm} = g_v \omega_0 \pm E^* \quad (2.27)$$

onde

$$E^* = \pm(k^2 + m_B^{*2})^{1/2} \quad (2.28)$$

A solução positiva está associada aos bárions e a negativa aos anti-bárions. Para a solução positiva ($\bar{u}u = 1$), temos

$$u(k, \lambda) = \left(\frac{E^* + m_B^*}{2E^*} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{\lambda} \\ \frac{\sigma \cdot k}{E^* + m_B^*} \chi_{\lambda} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

onde χ_{λ} é o espinor de Pauli, que na base dos autoestados do operador σ^3 , é dado por

$$\chi_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A solução para o campo bariônico é então:

$$\Psi_{k\lambda}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = u(k, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i(g_v \omega_0 + E^*)t} = u(k, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon_+ t} \quad (2.30)$$

Analogamente, a solução da equação de Dirac para os anti-bárions é

$$\Psi_{k\lambda}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = v(k, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i(g_v \omega_0 - E^*)t} = v(k, \lambda) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon_- t} \quad (2.31)$$

$$\text{com } \chi_{-\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O segundo passo consiste na quantização das soluções acima, escrevendo-as como operadores de campo, o que pode ser feito definindo-se operadores de criação e aniquilação de bárions e anti-bárions, cujas regras de anticomutação são:

$$\{a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^{\dagger}\} = \{b_{k\lambda}, b_{k'\lambda'}^{\dagger}\} = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.32a)$$

$$\{a_{k\lambda}, b_{k'\lambda'}\} = \{a_{k\lambda}^{\dagger}, b_{k'\lambda'}^{\dagger}\} = 0 \quad (2.32b)$$

Nesta base de operadores, o procedimento usual de quantização fornece a seguinte expressão para o operador campo [3]

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} \left[a_{k\lambda} u(k, \lambda) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon_+ t} + b_{k\lambda}^{\dagger} v(k, \lambda) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon_- t} \right] \quad (2.33)$$

onde V é o volume do sistema.

Num sistema esférico, o valor médio da parte espacial do campo vetorial é identicamente nulo, isto é, $\langle \omega_i \rangle_0 = 0$. Tem-se então apenas a componente temporal ω_0 e as soluções são obtidas fazendo-se a substituição do vetor \mathbf{k}_i pelo seu módulo k_i . Consideraremos o nosso sistema com simetria esférica.

Em termos dos campos médios σ_0 e ω_0 , a lagrangiana (2.1) se escreve agora como

$$\mathcal{L}_I^{ACM} = \bar{\Psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 \omega_0 - m_B^*] \Psi - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 \quad (2.34)$$

Usando a equação de movimento para Ψ (2.23), obtemos

$$(T_{\mu\nu})_{ACM} = i\bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi - \left(\frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) g_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

Escrevendo-se separadamente as componentes diagonais do tensor energia-momento, teremos:

$$(T_{00})_{ACM} = \Psi^\dagger i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2,$$

$$(T_{ii})_{ACM} = -i\Psi^\dagger \gamma \cdot \nabla \Psi + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2$$

De acordo com as equações (2.16) e (2.17), encontramos as seguintes expressões para a densidade de energia e pressão:

$$\varepsilon = \Psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \boldsymbol{\beta} m_B^* + g_v \omega_0) \Psi - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \quad (2.36)$$

$$P = \frac{1}{3} \Psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \Psi + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \quad (2.37)$$

onde nas passagens foi usada a equação de Dirac juntamente com as propriedades das matrizes de Dirac descritas no apêndice D.

Tomemos o limite $T = 0$. Devido ao Princípio de Exclusão de Pauli, todos os férmions do sistema, ou seja, os nucleons, devem preencher os níveis de energia abaixo do nível de Fermi. Podemos, então, definir o estado fundamental do sistema como:

$$|EF\rangle \equiv \prod_{k\lambda}^{k_F} a_{k\lambda}^\dagger |0\rangle, \quad (2.38)$$

onde k_F é o momento de Fermi dos nucleons e o $ket |0\rangle$ é o estado de vácuo dos operadores de aniquilação a e b , tal que

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0$$

Usando-se a Eq. (2.33), verifica-se que:

$$\rho_B = \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad (2.39)$$

onde $\gamma \equiv \sum_i (2S_i + 1)$ é a degenerescência de spin, sendo S_i o spin de cada espécie. Então $\gamma = 2$ para matéria de nêutrons e $\gamma = 4$ para matéria nuclear.

Assim, os valores esperados para a densidade de energia e para a pressão no estado fundamental, definido pela equação (2.38), são:

$$\varepsilon = g_v \omega_0 \rho_B - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} dk \quad (2.40)$$

$$P = \frac{1}{2} g_v \omega_0 \rho_B - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk \quad (2.41)$$

Eliminando-se ω_0 e σ_0 nas duas equações anteriores, através das equações (2.18-19), encontramos

$$\varepsilon = \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 + \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} dk \quad (2.42)$$

$$P = \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 - \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk \quad (2.43)$$

onde $C_v \equiv g_v m_B / m_v$ e $C_s \equiv g_s m_B / m_s$.

As duas equações acima especificam univocamente a equação de estado da matéria nuclear a temperatura zero, prevista por esse modelo. Elas fornecem a pressão e a densidade de energia em função de um único parâmetro: a densidade bariônica ρ_B .

A massa efetiva m_B^* pode ser obtida substituindo-se (2.18) em (2.24):

$$m_B^* = m_B - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 \frac{m_B^*}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk \quad (2.44)$$

Resolvendo-se a integral, temos:

$$m_B^* = m_B - \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{\gamma m_B^*}{4\pi^2} \left[k_F E_F^* - m_B^{*2} \ln \left(\frac{k_F + E_F^*}{m_B^*} \right) \right] \quad (2.45)$$

onde $E_F^* = (k_F^2 + m_B^{*2})^{1/2}$.

As constantes de acoplamento g_s e g_v são ajustadas usando-se as seguintes propriedades [3] da matéria nuclear simétrica saturada: a energia de ligação por nucleon e o momento de Fermi, cujos valores experimentais são

$$\left(\frac{E - N_B m_B}{N_B} \right)_0 = -15,75 \text{ MeV}$$

$$k_F^0 = 1,42 \text{ fm}^{-1} \quad (2.46a)$$

a partir dos quais obtemos

$$C_s^2 = 267,1 \text{ e } C_v^2 = 195,9 \quad (2.46b)$$

Observe que o modelo depende da razão entre as constantes de acoplamento e as massas dos respectivos mésons. Sendo assim, não existe uma escala que fixe a massa dos mésons para a matéria nuclear.

A massa efetiva m_B^* é uma função decrescente do campo escalar. Para a densidade nuclear ordinária, a razão m_B^*/m_B é da ordem de 0,6. Isto ocorre devido ao alto valor de $g_s \sigma_0$, que determina o comportamento da massa efetiva. Para a densidade de saturação, $g_s \sigma_0$ é da ordem de 400 MeV. Embora o campo repulsivo não afete o valor da massa efetiva, ele contribui para a energia de ligação por bárion (E/N_B), a esta mesma densidade, com aproximadamente 330 MeV.

Dessa forma, a baixa energia de ligação nuclear ($\approx 16 \text{ MeV}$) observada experimentalmente, pode ser entendida pela competição entre o campo escalar atrativo e o campo vetorial repulsivo.

Existem dois parâmetros relevantes para a discussão presente, que são a incompressibilidade da matéria nuclear saturada, definida por

$$K(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho^2} \right]_{\rho=\rho_0} \quad (2.47)$$

e a energia de assimetria [5,6]

$$a_4 = \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{g_\rho^2}{12\pi^2 m_\rho^2} k_F^2 + \frac{1}{6} \frac{k_F^2}{(k_F^2 + m_B^{*2})^{1/2}} \quad (2.48)$$

onde ρ_3 e g_ρ são grandezas associadas ao méson ρ . O coeficiente a_4 aparece na expressão para a fórmula semi-empírica de massa.

O valor previsto por este modelo para a incompressibilidade da matéria nuclear saturada é de 540 MeV, valor muito maior do que o obtido experimentalmente,

210 ± 30 MeV, enquanto que o modelo prevê para a_4 o valor de 22,1 MeV contra o valor empírico de 33,2 MeV.

2.3 O Modelo QHD-II

Uma extensão natural da QHD-I seria incorporar, além dos mésons σ e ω , o méson ρ .

2.3.1 O acoplamento ρ - N

Em sua forma mais simplificada, a densidade lagrangiana que descreve a interação entre o méson ρ e os nucleons é dada por [5]:

$$\mathcal{L}_{\rho N} = \bar{\Psi}_N \left[\gamma_\mu \left(i\partial_\mu - \frac{g_\rho}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu \right) - m_B \right] \Psi_N - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu \quad (2.49)$$

Onde $\boldsymbol{\tau}$ é o operador de isospin e

$$\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{\rho}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\rho}_\mu - g_\rho (\boldsymbol{\rho}_\mu \times \boldsymbol{\rho}_\nu)$$

O méson ρ é um vetor isovetor (isospin 1), que pode ser representado por um tripleto de quadrivetores correspondentes aos seus três estados de carga

$$\boldsymbol{\rho}^\mu = \begin{pmatrix} \rho_1^0 & \rho_1^x & \rho_1^y & \rho_1^z \\ \rho_2^0 & \rho_2^x & \rho_2^y & \rho_2^z \\ \rho_3^0 & \rho_3^x & \rho_3^y & \rho_3^z \end{pmatrix}$$

Consideremos a seguinte transformação global sobre o objeto $T \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu$:

$$[T \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu] \rightarrow [T \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu]' = e^{iT \cdot \vec{\theta}} T \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu e^{-iT \cdot \vec{\theta}}$$

Tal transformação deixa $\mathcal{L}_{\rho N}$ invariante, e a corrente conservada associada a esta invariância é dada, neste caso, pela corrente isovetorial

$$T^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_N \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_N + \boldsymbol{\rho}_\nu \times \boldsymbol{\rho}^{\nu\mu}$$

Frisemos, finalmente, que o resultado obtido para a lagrangiana parcial $\mathcal{L}_{\rho N}$ é uma consequência direta de sua invariância frente as transformações globais do grupo SU(2).

2.3.2 A Lagrangiana QHD-II

De acordo com o que foi visto a lagrangiana [3] para o sistema composto de nucleons acoplados aos campos mesônicos σ , ω e ρ é dada por:

$$\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\rho N} + \mathcal{L}_{\rho}^0 \quad (2.50)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\rho N} = -\frac{i}{2} g_{\rho} \bar{\Psi}_N \gamma^{\mu} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\mu} \Psi_N,$$

$$\mathcal{L}_{\rho}^0 = \frac{1}{2} m_{\rho}^2 \boldsymbol{\rho}_{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu} - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu}$$

e \mathcal{L}_I é a lagrangiana QHD-I, definida na Eq.2.1. As correspondentes equações de movimento são:

$$\left[\gamma^{\mu} \left(i \partial_{\mu} - g_{\nu} \omega_{\mu} - \frac{1}{2} g_{\rho} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\mu} \right) - (m_B - g_s \boldsymbol{\sigma}) \right] \Psi_N = 0 \quad (2.51)$$

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m_s^2) \boldsymbol{\sigma} = g_s \bar{\Psi}_N \Psi_N \quad (2.52)$$

$$\partial_{\mu} \omega^{\mu\nu} + m_{\nu}^2 \omega^{\nu} = g_{\nu} \bar{\Psi}_N \gamma^{\nu} \Psi_N \quad (2.53)$$

$$\partial_{\mu} \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + m_{\rho}^2 \boldsymbol{\rho}^{\nu} = \frac{1}{2} g_{\rho} \bar{\Psi}_N \gamma^{\nu} \boldsymbol{\tau} \Psi_N \quad (2.54)$$

Afortunadamente, a aproximação de campo médio conduz a uma significativa simplificação destas equações.

A invariância de translação e de rotação implica que os valores médios das componentes espaciais dos campos mesônicos sejam todos nulos, isto é,

$$\langle \omega_i \rangle_0 = \langle \boldsymbol{\rho}_i \rangle_0 = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

e que os termos derivativos mesônicos também sejam nulos. Por outro lado, no espaço de isospin temos que:

$$\boldsymbol{\tau}_3 |EF\rangle = (N_p - N_n) |EF\rangle$$

onde N_p é o número total de prótons do sistema e N_n o número total de nêutrons. Escolhendo-se $\langle \boldsymbol{\tau}_1 \rangle_0 = \langle \boldsymbol{\tau}_2 \rangle_0 = 0$, tem-se:

$$\langle \boldsymbol{\rho}_1^0 \rangle_0 = \langle \boldsymbol{\rho}_2^0 \rangle_0 = 0$$

Sendo assim, quando a aproximação de campo médio é aplicada ao campo $\boldsymbol{\rho}_{\mu}$, sobrevive somente a componente temporal $\langle \boldsymbol{\rho}_3^0 \rangle_0 \equiv \rho_{03}$, associada ao méson ρ neutro.

Tendo em vista as simplificações mencionadas acima, a lagrangiana QHD-II se reduz à expressão:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{II}^{ACM} = & \bar{\Psi}_N \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 \rho_{03} - g_\nu \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_s \sigma_0) \right] \Psi_N \\ & - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\nu^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

a partir da qual obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 \gamma^0 \rho_{03} - g_\nu \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_s \sigma_0) \right] \Psi_N = 0 \quad (2.56)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s \quad (2.57)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\nu}{m_\nu^2} \rho_B \quad (2.58)$$

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{2m_\rho^2} \rho_3 \quad (2.59)$$

onde as fontes dos campos mesônicos são dadas por:

$$\rho_s = \langle \bar{\Psi}_N \Psi_N \rangle = \left(\langle \bar{\Psi}_p \Psi_p \rangle \right)_+ \langle \bar{\Psi}_n \Psi_n \rangle \quad (2.60)$$

$$\rho_B = \langle \bar{\Psi}_N^\dagger \Psi_N \rangle = \left(\langle \bar{\Psi}_p^\dagger \Psi_p \rangle \right)_+ \langle \bar{\Psi}_n^\dagger \Psi_n \rangle \quad (2.61)$$

$$\rho_3 = \langle \bar{\Psi}_N^\dagger \tau_3 \Psi_N \rangle = \left(\langle \bar{\Psi}_p^\dagger \Psi_p \rangle \right)_- \langle \bar{\Psi}_n^\dagger \Psi_n \rangle \quad (2.62)$$

De acordo com a equação acima, vemos que o méson ρ traz informação sobre a assimetria de carga no sistema e que a fonte ρ_3 pode ser escrita na forma

$$\rho_3 = \rho_p - \rho_n$$

Em particular, para $\rho_p = \rho_n$ (matéria nuclear simétrica), recupera-se os resultados obtidos na seção 2.1.

A solução da equação de Dirac é semelhante à que foi obtida na primeira seção. Entretanto, a relação de dispersão é dada agora pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_\pm = g_\nu \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \rho_{03} \pm \left(k^2 + m_B^{*2} \right)^{1/2} \text{ para prótons} \quad (2.64)$$

e

$$\varepsilon_{\pm} = g_v \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \rho_{03} \pm (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} \quad \text{para n\u00eautrons.} \quad (2.65)$$

2.3.3 As Equa\u00e7\u00f5es de Estado

Veamos agora como fica a equa\u00e7\u00e3o de estado prevista pelo modelo QHD-II. Para o valor m\u00e9dio do tensor energia-momento, temos a seguinte express\u00e3o:

$$(T_{\mu\nu})_0 = -g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right) + \langle \bar{\Psi}_p i \gamma_\mu \partial_\nu \Psi_p \rangle + \langle \bar{\Psi}_n i \gamma_\mu \partial_\nu \Psi_n \rangle \quad (2.66)$$

De acordo com o que vimos na se\u00e7\u00e3o 2.1, a equa\u00e7\u00e3o de estado para a mat\u00e9ria nuclear fria \u00e9 dada, ent\u00e3o, por:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle_0 = \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 + \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{C_\rho^2}{8m_B^2} \rho_{03}^2 + \frac{2}{(2\pi)^3} \left[\int_0^{k_p} (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} d^3k + \int_0^{k_n} (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} d^3k \right] \quad (2.67)$$

e

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle_0 = \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 - \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{C_\rho^2}{8m_B^2} \rho_{03}^2 + \frac{2}{(2\pi)^3} \left[\int_0^{k_p} \frac{k^2}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k + \int_0^{k_n} \frac{k^2}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k \right] \quad (2.68)$$

onde k_p e k_n s\u00e3o os momentos de Fermi dos pr\u00f3tons e n\u00eautrons, $C_\rho = g_\rho m_B / m_\rho$ e $C_v = g_v m_B / m_v$.

Por \u00faltimo, a Eq. 2.24 fornece a seguinte equa\u00e7\u00e3o de movimento para a massa efetiva:

$$m_B^* = m_B - g_s \sigma_0 = m_B - \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{2}{(2\pi)^3} \left[\int_0^{k_p} \frac{m_B^*}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k + \int_0^{k_n} \frac{m_B^*}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k \right] \quad (2.69)$$

No total, o modelo possui cinco par\u00e2metros, sendo dois deles par\u00e2metros externos – ρ_B e ρ_3 , e mais as constantes de acoplamento g_s , g_v , fixadas pelas mesmas propriedades da

matéria nuclear simétrica mencionadas no final da seção 2.1 e g_ρ , obtido mediante o ajuste do valor empírico de a_4 .

Descrição Lagrangiana do Bounce Hidrodinâmico

3.1 Introdução

Dentre os mecanismos capazes de causar uma explosão de supernova, o *bounce* é o mais simples deles, pois não depende explicitamente de processos microscópicos específicos, mas apenas das propriedades globais da matéria estelar durante o colapso.

Como vimos na seção 1.9, o *bounce* é um movimento súbito de expansão do caroço da estrela. Em frações de segundo, a matéria estelar transita do regime subnuclear ao regime supranuclear, passando pelo regime hadrônico de densidade, e a equação de estado torna-se mais dura devido ao crescimento das forças repulsivas de curto alcance, causando uma inversão no colapso gravitacional (ver Apêndice B).

Assim, a equação de estado da matéria estelar no regime hadrônico é decisiva e é ela quem determina a possibilidade ou não de uma explosão. O rompimento ou não do manto estelar depende da quantidade de energia da onda de choque gerada. É por isso que o estudo das propriedades da matéria nuclear densa é tão importante para a astrofísica nuclear.

As equações de estado da matéria estelar hadrônica e supranuclear serão estudadas no próximo capítulo. Neste capítulo, apresentaremos um formalismo [1] que descreve, de forma simples, os aspectos globais que caracterizam a dinâmica do colapso gravitacional e a explosão de supernova, e verificaremos que o *bounce* é um mecanismo eficiente de explosão, mas antes vamos descrever rapidamente o tratamento que é usualmente empregado em cálculos hidrodinâmicos de supernovas.

Esse tratamento divide o caroço da pré-supernova em muitas camadas descritas por suas massas, raios, densidades, temperaturas, e sobre tal sistema são aplicadas as equações da hidrodinâmica. As equações de movimento resultantes são aproximadas por um conjunto equivalente de equações, as equações de diferenças finitas [2], em que as variáveis locais são discretizadas, possibilitando a integração numérica do sistema original de equações. No entanto, para se obter soluções estáveis dessas equações de movimento, faz-se necessária a implementação de um código numérico que contenha um número elevado de malhas, chegando às centenas ou aos milhares. Para contornar o problema inevitável do aparecimento de descontinuidades excessivamente grandes nas variáveis e a conseqüente divergência da solução numérica, utiliza-se um recurso puramente matemático, a *pseudoviscosidade* de VonNeumann-Richtmyer [3]. A pseudoviscosidade tem as mesmas dimensões de pressão e entra nas equações de movimento como um termo dissipativo artificial. Ela é definida de forma a assumir valores desprezíveis nas regiões homogêneas do fluido e valores grandes nas regiões onde há uma tendência a se formar uma descontinuidade numérica, ou seja, nas camadas altamente comprimidas. O resultado obtido é uma suavização da frente de onda de

choque, cuja espessura pode conter várias camadas. Esse formalismo apresenta a desvantagem de requerer tratamento numérico para um grande número de variáveis.

Em 1992, Rodrigues, Duarte, Kodama e Ávila [4], propuseram um modelo semi-analítico efetivo para descrever a dinâmica do colapso gravitacional adiabático e o mecanismo de *bounce*. O caroço da pré-supernova é dividido em camadas homogêneas, com massas fixas especificadas por seus raios e densidades médias. Para descrever a dinâmica do sistema, uma Lagrangiana efetiva é construída tomando-se como coordenadas generalizadas os raios das camadas. A partir daí as equações de movimento são obtidas analiticamente e integradas numericamente.

Existe uma diferença entre esta abordagem e a anterior. As equações da hidrodinâmica são equações diferenciais parciais que devem ser aproximadas por um conjunto de equações de diferenças finitas, o que possibilita uma solução numérica das equações de movimento. Tal aproximação é tanto melhor quanto maior for o número de camadas. Por outro lado, na descrição lagrangiana efetiva, as equações de movimento são integradas numericamente sem a necessidade de introduzir-se aproximações prévias, sendo possível, a princípio, fazer cálculos para um número arbitrário de camadas, como duas, sem comprometer a precisão ou a estabilidade da solução numérica, o que não ocorre no formalismo hidrodinâmico usual, onde existe a forte restrição de que o número de camadas deve ser grande. Entretanto, as duas abordagens são equivalentes, pois se aplicando o limite hidrodinâmico nas equações de movimento obtidas através da lagrangiana, ou seja, fazendo-se o número de camadas tender ao infinito e a massa de cada camada tender a zero, recuperam-se as equações da hidrodinâmica.

Imaginaremos a explosão de uma supernova como um processo no qual em frações de segundo, o caroço inicial da pré supernova separa-se em dois subsistemas: um caroço denso remanescente - uma estrela de nêutrons - e uma camada externa violentamente ejetada. A maneira mais simples de descrever o processo consiste no desmembramento do caroço da pré-supernova desde o início do colapso, em duas camadas homogêneas descritas por seus raios, massas, densidades médias, pressões e densidades de energia interna. Como graus de liberdade do sistema, serão considerados os raios e as massas das duas camadas, que servirão de coordenadas generalizadas.

3.2 O Formalismo

Divide-se o caroço esférico da pré supernova em duas camadas concêntricas: uma camada interna dada por uma esfera de raio R_1 e massa m_1 e uma camada externa limitada interiormente pela superfície esférica de raio R_1 e exteriormente pela superfície de raio R_2 e massa m_2 como mostra a figura 3.1

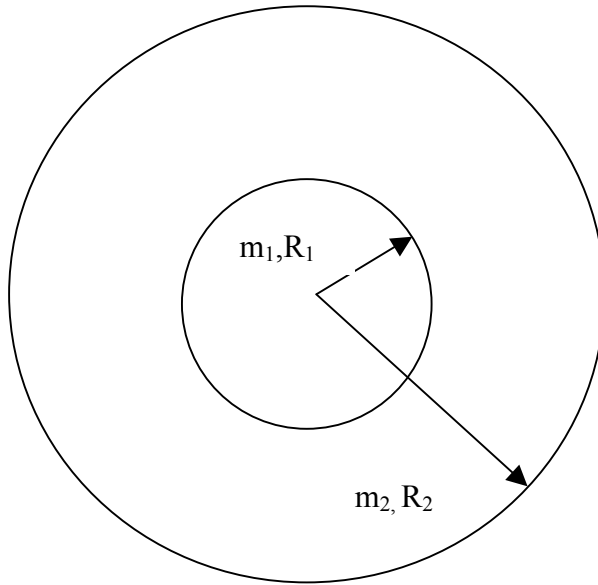


Figura 3.1 Caroço dividido em duas camadas concêntricas

O sistema está submetido ao vínculo

$$m_1 + m_2 = m = \text{constante} \quad (3.1)$$

Onde m é a massa total do caroço. No caso de duas camadas, esse vínculo reduz o número de graus de liberdade para apenas três: R_1 , R_2 e m_1 .

Considerando as duas camadas homogêneas, temos para as densidades de massa:

$$\rho_1 = \frac{3m_1}{4\pi R_1^3} \quad (3.2)$$

$$\rho_2 = \frac{3(m - m_1)}{4\pi (R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3m_2}{4\pi (R_2^3 - R_1^3)} \quad (3.3)$$

Desprezando-se perdas de energia durante o colapso gravitacional, escrevemos a Lagrangiana do sistema como:

$$L = L(R_1, R_2, m_1, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{m}_1) = K - W - \mathcal{E} \quad (3.4)$$

onde K é a energia cinética do sistema, W a energia potencial gravitacional e \mathcal{E} a energia interna.

3.3 Cálculo da Energia Cinética

Para o cálculo da energia cinética do sistema, precisamos determinar o campo de velocidade do fluido compressível. Usaremos a equação da continuidade, que devido a simetria esférica do nosso problema é escrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho \vartheta) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

onde ϑ é a velocidade. Como a densidade depende implicitamente do tempo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial m} + \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial R} \quad (3.6)$$

logo

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \dot{m}_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial m_1} + \dot{R}_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial R_1} \quad (3.7)$$

com

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial m_1} = \frac{3}{4\pi R_1^3} \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial R_1} = -\frac{9m_1}{4\pi R_1^4} \quad (3.9)$$

Então,

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{3\dot{m}_1}{4\pi R_1^3} - \frac{9\dot{R}_1 m_1}{4\pi R_1^4} \quad (3.10)$$

que substituído em 3.5 leva à:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \rho_1 \vartheta_1(r)) = \left(\frac{9\dot{R}_1 m_1}{4\pi R_1^4} - \frac{3\dot{m}_1}{4\pi R_1^3} \right) r^2 \quad (3.11)$$

Integrando em r , temos:

$$\vartheta_1(r) = \left(\frac{3\dot{R}_1 m_1}{4\pi R_1^4 \rho_1} - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^3 \rho_1} \right) r + \frac{a}{\rho_1 r^2}, \quad a = \text{constante} \quad (3.12)$$

Levando em 3.12 a expressão para a densidade da camada 1, e, sabendo que, ao aplicarmos os limites de integração (desde zero até R_1), encontramos zero para o valor da constante a , temos então:

$$\vartheta_1(r) = \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{m}_1}{3m_1} \right) r \quad (3.13)$$

Essa equação é linear em r , ou seja, ela define um caroço homólogo. Repetimos o mesmo cálculo para a 2ª camada, e encontramos:

$$\vartheta_2(r) = -\frac{\dot{\rho}_2}{3\rho_2}r + \frac{b}{r^2\rho_2}, \quad b = \text{constante} \quad (3.14)$$

O fluxo de massa através da superfície de separação esférica S_1 , definida pelo raio R_1 , é ditado igualmente pela lei da conservação da massa, que na forma integral se escreve:

$$\dot{m}_1 = -\int_{S_1} \rho_2 u_2(R_1) dS_1 \quad (3.15)$$

onde $S_1 = 4\pi R_1^2$ e $u_2(R_1) \equiv \vartheta_2(R_1) - \dot{R}_1$, é a velocidade da camada 2 em relação à descontinuidade $r = R_1$. Com essa equação determinamos b :

$$\dot{m}_1 = -\rho_2(\vartheta_2(R_1) - \dot{R}_1)S_1 \quad (3.16)$$

$$\frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2} = -\rho_2 \left[-\frac{\dot{\rho}_2}{3\rho_2}R_1 + \frac{b}{R_1^2\rho_2} - \dot{R}_1 \right] \quad (3.17)$$

donde

$$b = \frac{\dot{\rho}_2 R_1^3}{3} + R_1^2 \dot{R}_1 \rho_2 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi} \quad (3.18)$$

Substituindo em (3.14) e sabendo que $\dot{m}_2 = -\dot{m}_1$

$$\vartheta_2(r) = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) + \frac{\dot{m}_1}{3m_2} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) + \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2} \quad (3.19)$$

e, a partir das Eqs. (3.2 e 3.13), verifica-se que:

$$\vartheta_1(R_1) = \dot{R}_1 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2 \rho_1} \quad (3.20)$$

e da Eq. (3.19),

$$\vartheta_2(R_1) = \dot{R}_1 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2 \rho_2} \quad (3.21)$$

e

$$\vartheta_2(R_2) = \dot{R}_2 \quad (3.22)$$

Nas equações (3.20) e (3.21) percebe-se que a presença de um fluxo de massa através da superfície S_1 provoca uma descontinuidade no campo de velocidade em $r = R_1$. É essa

descontinuidade no campo de velocidade associada à descontinuidade na pressão e na densidade das camadas que caracteriza a formação de uma onda de choque.

Na interface R_1 ,

$$\Delta v = v_1(R_1) - v_2(R_1) = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2} \quad (3.23)$$

Vemos então que a descontinuidade no campo de velocidade se anula apenas se $\rho_1 = \rho_2$ ou se $\dot{m}_1 = 0$. Mas se Δv for muito grande ($\dot{m}_1 \gg 0$ e $\rho_1 > \rho_2$), uma onda de choque é formada. Existe também uma descontinuidade na pressão que é uma função monotonamente crescente da densidade.

Eliminando-se \dot{m}_1 nas Eqs. 3.20 e 3.21, obtemos a lei da conservação da massa através da descontinuidade, dada por $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, que corresponde à condição de Hugoniot-Rankine para a lei de conservação do fluxo de massa através da superfície S_1 e onde u_1 e u_2 são as velocidades relativas [9].

Podemos agora determinar a energia cinética do sistema.

Como $K = K_1 + K_2$, podemos calcular as contribuições das duas camadas para a energia cinética do carvão. Sabendo que

$$K_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i v_i^2(r) dV$$

onde $dV = 4\pi r^2 dr$, calcularemos em primeiro lugar v_1^2 :

$$v_1^2 = \left(\frac{\dot{R}_1^2}{R_1^2} - \frac{2\dot{R}_1\dot{m}_1}{3R_1 m_1} + \frac{\dot{m}_1^2}{9m_1} \right) r^2 \quad (3.24)$$

o que leva à seguinte expressão para a energia cinética da primeira camada:

$$K_1 = \frac{3}{10} m_1 \dot{R}_1^2 - \frac{1}{5} \dot{R}_1 \dot{m}_1 R_1 + \frac{1}{30} \frac{\dot{m}_1^2 R_1^2}{m_1} \quad (3.25)$$

Para o cálculo de v_2^2 teremos um pouco mais de trabalho, pois temos um polinômio bastante extenso que deverá ser elevado ao quadrado. Por razões lógicas, não colocaremos todo o cálculo aqui, mas caso o leitor queira reproduzi-los basta seguir alguns passos:

Sabendo que

$$v_2 = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) + \frac{\dot{m}_1}{3m_2} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) + \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2} \quad (3.26)$$

Podemos escrever o polinômio da seguinte forma:

$$\vartheta_2 = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 r}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{R_1^2 \dot{R}_1 r}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{R_1^3 R_2^2 \dot{R}_2}{r^2 (R_2^3 - R_1^3)} + \frac{R_1^5 \dot{R}_1}{r^2 (R_2^3 - R_1^3)} + \frac{\dot{m}_1 r}{3m_2} - \frac{\dot{m}_1 R_2^3}{3m_2 r^2} + \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2}$$

Elevando ao quadrado, obtemos um polinômio constituído de 28 termos. Coloca-se em evidência r^2 , $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^4}$. Como

$$K_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \int_{V_2} \vartheta_2^2(r) dV = 2\pi \rho_2 \int_{R_1}^{R_2} \vartheta_2^2(r) r^2 dr$$

integra-se tudo em r de R_1 a R_2 . Obtém-se assim uma expressão para K_2 .

Chamando R_2/R_1 de X, e agrupando os termos em $\dot{R}_1^2, \dot{R}_2^2, \dot{m}_1^2$ e os termos cruzados, chega-se a:

$$\begin{aligned} K_2 = & 2\pi \rho_2 R_1^3 \dot{R}_1^2 \left(\frac{(X^5 - 1)}{5(X^3 - 1)} - \frac{(X^2 - 1)}{(X^3 - 1)^2} - \frac{(X^2 - 1)}{(X^3 - 1)} + \frac{(X - 1)}{X(X^3 - 1)^2} + \frac{(X - 1)}{X} + \frac{2(X - 1)}{X(X^3 - 1)} \right) \\ & + 2\pi \rho_2 R_1^3 \dot{R}_2^2 \left(\frac{X^4(X^5 - 1)}{5(X^3 - 1)^2} - \frac{X^4(X^2 - 1)}{(X^3 - 1)^2} + \frac{X^3(X - 1)}{(X^3 - 1)^2} \right) \\ & + 2\pi \rho_2 R_1^5 \dot{m}_1^2 \left(\frac{(X^5 - 1)}{45m_2^2} + \frac{X^5(X - 1)}{9m_2^2} - \frac{X^3(X^2 - 1)}{9m_2^2} \right) \\ & + 2\pi \rho_2 R_1^3 \dot{R}_1 \dot{R}_2 \left(-\frac{2X^2(X^5 - 1)}{5(X^3 - 1)^2} + \frac{X^2(X^2 - 1)}{(X^3 - 1)^2} + \frac{X^2(X^2 - 1)}{(X^3 - 1)} + \frac{X^2(X^2 - 1)}{(X^3 - 1)^2} - \frac{2X(X - 1)}{(X^3 - 1)^2} - \frac{2X(X - 1)}{(X^3 - 1)} \right) \\ & + 2\pi \rho_2 R_1^4 \dot{m}_1 \dot{R}_1 \left(\frac{-2(X^5 - 1)}{15m_2(X^3 - 1)} + \frac{X^3(X^2 - 1)}{3m_2(X^3 - 1)} + \frac{(X^2 - 1)}{3m_2(X^3 - 1)} + \frac{(X^2 - 1)}{3m_2} - \frac{2X^2(X - 1)}{3m_2(X^3 - 1)} - \frac{2X^2(X - 1)}{3m_2} \right) \\ & + 2\pi \rho_2 R_1^4 \dot{m}_1 \dot{R}_2 \left(\frac{2X^2(X^5 - 1)}{15m_2(X^3 - 1)} - \frac{X^5(X^2 - 1)}{3m_2(X^3 - 1)} - \frac{X^2(X^2 - 1)}{3m_2(X^3 - 1)} + \frac{2X^4(X - 1)}{3m_2(X^3 - 1)} \right) \end{aligned}$$

Como

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

$$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$$

e lembrando que da Eq. (3.3)

$$\rho_2 = \frac{3m_2}{4\pi R_1^3 (X^3 - 1)} \Rightarrow 2\pi\rho_2 = \frac{3m_2}{2R_1^3 (X-1)(X^2 + X + 1)}$$

finalmente chega-se à seguinte expressão para o termo referente à segunda camada para a energia cinética do caroço:

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{3(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)m_2}{10(X^2 + X + 1)^3} \dot{R}_1^2 + \frac{3X^3(X^3 + 3X^2 + 6X + 5)m_2}{10(X^2 + X + 1)^3} \dot{R}_2^2 \\ & + \frac{(X-1)^2(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)R_1^2}{30m_2(X^2 + X + 1)} \dot{m}_1^2 + \frac{9X^2(X^2 + 3X + 1)m_2}{10(X^2 + X + 1)^3} \dot{R}_1 \dot{R}_2 \\ & - \frac{(X-1)(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)R_1}{5(X^2 + X + 1)^2} \dot{m}_1 \dot{R}_1 - \frac{3X^2(X-1)(X^2 + 3X + 1)R_1}{10(X^2 + X + 1)^2} \dot{m}_1 \dot{R}_2 \end{aligned}$$

A energia cinética total é então:

$$\begin{aligned} K = & \frac{3}{10} \left[\frac{(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)m_2}{(X^2 + X + 1)^3} + m_1 \right] \dot{R}_1^2 + \frac{3X^3(X^3 + 3X^2 + 6X + 5)m_2}{10(X^2 + X + 1)^3} \dot{R}_2^2 \\ & + \frac{1}{30} \left[\left(\frac{(X-1)^2(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)}{m_2(X^2 + X + 1)} + \frac{1}{m_1} \right) R_1^2 \right] \dot{m}_1^2 + \frac{9X^2(X^2 + 3X + 1)m_2}{10(X^2 + X + 1)^3} \dot{R}_1 \dot{R}_2 \\ & - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{(X-1)(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)}{5(X^2 + X + 1)^2} + 1 \right) R_1 \right] \dot{m}_1 \dot{R}_1 - \frac{3X^2(X-1)(X^2 + 3X + 1)R_1}{10(X^2 + X + 1)^2} \dot{m}_1 \dot{R}_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Todo o cálculo da energia cinética das duas camadas pode ser resumido em sua forma quadrática:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{V} | \mathbf{M} | \mathbf{V} \rangle \quad (3.28)$$

onde

$$|\mathbf{V}\rangle = \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dot{m}_1 \end{pmatrix}$$

e \mathbf{M} é uma matriz simétrica definida por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

cujos elementos de matriz são:

$$M_{11} = \frac{3}{5} \left[\frac{(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)}{(X^2 + X + 1)^3} m_2 + m_1 \right]$$

$$M_{22} = \frac{3X^3(X^3 + 3X^2 + 6X + 5)}{5(X^2 + X + 1)^3} m_2$$

$$M_{33} = \frac{1}{15} \left[\frac{(X-1)^2(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)}{m_2(X^2 + X + 1)} + \frac{1}{m_1} \right] R_1^2$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{9X^2(X^2 + 3X + 1)}{10(X^2 + X + 1)^3} m_2$$

$$M_{13} = M_{31} = -\frac{1}{5} \left[\frac{(X-1)(5X^3 + 6X^2 + 3X + 1)}{(X^2 + X + 1)^2} + 1 \right] R_1$$

$$M_{23} = M_{32} = -\frac{3}{10} \frac{X^2(X-1)(X^2 + 3X + 1)}{(X^2 + X + 1)^2} R_1$$

3.4 A Energia Potencial Gravitacional e a Energia Interna.

A energia potencial gravitacional é composta de três termos:

- A autoenergia gravitacional da camada 1 dada por

$$W_1 = - \int_0^{R_1} \frac{Gm_1(r)}{r} dm_1 \quad (3.29)$$

onde G é a constante de gravitação universal,

- A autoenergia gravitacional da camada 2:

$$W_2 = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Gm_2(r)}{r} dm_2 \quad (3.30)$$

- E a energia de interação entre as duas camadas:

$$W_{\text{int}} = - \int_{R_1}^{R_2} Gm_1 \frac{dm_2(r)}{r} \quad (3.31)$$

O resultado final é:

$$W = - \frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[m_1^2 + f(X)m_2^2 + \frac{5}{2} g(X)m_1m_2 \right] \quad (3.32)$$

onde

$$f(X) = \frac{1}{2} \frac{2X^3 + 4X^2 + 6X + 3}{(X^2 + X + 1)^2}$$

e

$$g(X) = \frac{X + 1}{X^2 + X + 1}, \quad X = \frac{R_1}{R_2}$$

Só falta agora conhecermos a energia interna do sistema. Ela pode ser determinada a partir da densidade de energia interna por unidade de volume,

$$\mathcal{E} = \frac{m_1 \mathcal{E}_1}{\rho_1} + \frac{m_2 \mathcal{E}_2}{\rho_2} \quad (3.33)$$

ou ainda, através de uma equação de estado que nos forneça o seu valor como função da densidade bariônica, o que será abordado no próximo capítulo.

3.5 Equações de Movimento

Da Lagrangiana $L = K - W - \mathcal{E}$ podemos deduzir as equações de Euler-Lagrange correspondentes às equações de movimento para as três coordenadas generalizadas usadas para descrever a evolução dinâmica do sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\kappa} = 0 \quad (3.34)$$

onde $q_\kappa = R_1, R_2, m_1$ e $\dot{q}_\kappa = \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{m}_1$. Temos então:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) = \frac{\partial K}{\partial q_\kappa} - \frac{\partial}{\partial q_\kappa} (W + \mathcal{E}) \quad (3.35)$$

Os termos de força oriundos da energia cinética, presentes na equação acima, são dados por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) = \frac{d}{dt} \langle k | \mathbf{M} | \mathbf{v} \rangle, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.36)$$

onde \mathbf{M} é a matriz definida na seção anterior e

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2} F_k$$

sendo

$$F_\kappa \equiv \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Os termos correspondentes à força gravitacional e à força hidrostática serão analisados posteriormente.

Precisamos das derivadas temporais e espaciais de cada elemento da matriz \mathbf{M} . As derivadas espaciais são:

$$M'_{11} = -\frac{9}{5} m_2 X^2 \frac{5X^2 + 8X + 2}{(X^2 + X + 1)^4} \quad (3.37a)$$

$$M'_{12} = -\frac{9}{5} m_2 X \frac{X^4 + 4X^3 - 4X - 1}{(X^2 + X + 1)^4} \quad (3.37b)$$

$$M'_{13} = -\frac{9}{5} X^2 \frac{X^2 + 3X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} R_1 \quad (3.37c)$$

$$M'_{22} = \frac{9}{5} m_2 X^2 \frac{2X^2 + 8X + 5}{(X^2 + X + 1)^4} \quad (3.37d)$$

$$M'_{23} = -\frac{9}{5} X \frac{X^5 + 3X^4 + 11X^3 + 8X^2 - 6X - 2}{2(X^2 + X + 1)^3} R_1 \quad (3.37e)$$

$$M'_{33} = \frac{3}{5m_2} X^2 \frac{5X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 8X - 4}{(X^2 + X + 1)^2} R_1^2 \quad (3.37f)$$

e as derivadas temporais são:

$$\dot{M}'_{11} = \frac{1}{R_1} M'_{11} \dot{R}_2 - \frac{X}{R_1} M'_{11} \dot{R}_1 + \frac{1}{m_2} \left(\frac{3}{5} m - M_{11} \right) \dot{m}_1 \quad (3.38a)$$

$$\dot{M}'_{12} = \frac{1}{R_1} M'_{12} \dot{R}_2 - \frac{X}{R_1} M'_{12} \dot{R}_1 - \frac{1}{m_2} M_{12} \dot{m}_1 \quad (3.38b)$$

$$\dot{M}'_{13} = \frac{1}{R_1} M'_{13} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} (M_{13} - XM'_{13}) \dot{R}_1 \quad (3.38c)$$

$$\dot{M}'_{22} = \frac{1}{R_1} M'_{22} \dot{R}_2 - \frac{X}{R_1} M'_{22} \dot{R}_1 - \frac{1}{m_2} M_{22} \dot{m}_1 \quad (3.38d)$$

$$\dot{M}'_{23} = \frac{1}{R_1} M'_{23} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} (M_{23} - XM'_{23}) \dot{R}_1 \quad (3.38e)$$

$$\dot{M}'_{33} = \frac{1}{R_1} M'_{33} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} (2M_{33} - XM'_{33}) \dot{R}_1 + \frac{1}{m_2} \left(M_{33} - \frac{1}{15} m \frac{R_1^2}{m_1^2} \right) \dot{m}_1 \quad (3.38f)$$

As equações de movimento para R_1, R_2 e m_1 podem ser escritas como

$$\begin{aligned} M_{11} \ddot{R}_1 + M_{12} \ddot{R}_2 + M_{13} \ddot{m}_1 &= Q_1 + B_1 + H_1 \\ M_{12} \ddot{R}_1 + M_{22} \ddot{R}_2 + M_{23} \ddot{m}_1 &= Q_2 + B_2 + H_2 \\ M_{13} \ddot{R}_1 + M_{23} \ddot{R}_2 + M_{33} \ddot{m}_1 &= Q_3 + B_3 + H_3 \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde Q_1, Q_2 e Q_3 representam as forças generalizadas das velocidades, derivadas da energia cinética, B_1, B_2 e B_3 formam o conjunto das forças gravitacionais e H_1, H_2 e H_3 as forças hidrostáticas. Estas forças são dadas por:

$$Q_1 = -\frac{\partial K}{\partial R_1} = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} X M'_{11} \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} (2M'_{12} + X M'_{22}) \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} (2M'_{33} - X M'_{33}) \dot{m}_1^2 \right. \\ \left. - M'_{11} \dot{R}_1 \dot{R}_2 - \frac{R_1}{m_2} \left(\frac{3}{5} m - M_{11} \right) \dot{m}_1 \dot{R}_1 + \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} + M_{23} - M'_{13} - X M'_{23} \right) \dot{m}_1 \dot{R}_2 \right] \quad (3.40)$$

$$Q_2 = -\frac{\partial K}{\partial R_2} = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} (M'_{11} + 2X M'_{12}) \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} M'_{22} \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} M'_{33} \dot{m}_1^2 \right. \\ \left. + X M'_{22} \dot{R}_1 \dot{R}_2 + \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} - M_{23} + M'_{13} + X M'_{23} \right) \dot{m}_1 \dot{R}_1 + \frac{R_1}{m_2} M_{22} \dot{m}_1 \dot{R}_2 \right] \quad (3.41)$$

$$Q_3 = -\frac{\partial K}{\partial m_1} = \left[\frac{1}{2m_2} \left(\frac{3}{5} m - M_{11} \right) - \frac{1}{R_1} (M_{13} - X M'_{13}) \right] \dot{R}_1^2 \\ - \frac{1}{R_1} \left(M'_{23} + \frac{1}{2} \frac{R_1}{m_2} M_{22} \right) \dot{R}_2^2 - \frac{1}{2m_2} \left(M_{33} - \frac{1}{15} m \frac{R_1^2}{m_1^2} \right) \dot{m}_1^2 \\ - \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} + M_{23} + M'_{13} - X M'_{23} \right) \dot{R}_1 \dot{R}_2 \\ - \frac{1}{R_1} (2M'_{33} - X M'_{33}) \dot{m}_1 \dot{R}_1 - \frac{1}{R_1} M'_{33} \dot{m}_1 \dot{R}_2 \quad (3.42)$$

Lembrando que

$$f(X) = \frac{1}{2} \frac{2X^3 + 4X^2 + 6X + 3}{(X^2 + X + 1)^2} \quad \text{e} \quad g(X) = \frac{X + 1}{X^2 + X + 1}$$

e definindo

$$f_1(X) = \frac{3}{2} \frac{X^2 + 3X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}, \quad f_2(X) = X^3 \frac{X^3 + 3X^2 + 6X + 5}{(X^2 + X + 1)^3}$$

$$g_1(X) = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} \quad \text{e} \quad g_2(X) = X^3 \frac{X+2}{(X^2+X+1)^2}$$

o conjunto de forças gravitacionais é então, formado pelas expressões:

$$B_1 = -\frac{\partial W}{\partial R_1} = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1^2} [m_1^2 + f_1(X)m_2^2] + \frac{5}{2} g_1(X)m_1m_2 \quad (3.43)$$

$$B_2 = -\frac{\partial W}{\partial R_2} = -\frac{3}{5} \frac{G}{X^2 R_1^2} \left[f_2(X)m_2^2 + \frac{5}{2} g_2(X)m_1m_2 \right] \quad (3.44)$$

$$B_3 = -\frac{\partial W}{\partial m_1} = \frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[2(m_1 - f(X)m_2) + \frac{5}{2} g(X)(m_1 - m_2) \right] \quad (3.45)$$

Precisamos ainda determinar as forças hidrostáticas. Para a primeira equação de movimento, temos:

$$H_1 = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R_1} = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial R_1} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial R_1} \right) \quad (3.46)$$

Como $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} = -P$, onde P é a pressão, temos então

$$H_1 = 4\pi(P_1 - P_2)R_1^2 \quad (3.47)$$

e através de cálculos semelhantes,

$$H_2 = 4\pi P_2 R_2^2 \quad (3.48)$$

Para o cálculo de H_3 será mais conveniente escrevermos a expressão para a energia interna na forma

$$\mathcal{E} = m_1 \epsilon_1(\rho_1) + m_2 \epsilon_2(\rho_2) \quad (3.49)$$

onde, aqui, $\epsilon_1(\rho_1)$ e $\epsilon_2(\rho_2)$ denotam a energia interna específica de cada camada. Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m_1} &= \epsilon_1 + m_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial m_1} - \epsilon_2 + m_2 \frac{\partial \epsilon_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial m_1} \\ &= \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} - \epsilon_2 - \frac{P_2}{\rho_2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde v_1 e v_2 são os volumes específicos das camadas.

Então, em termos da densidade volumétrica de energia, podemos escrever:

$$H_3 = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m_1} = \frac{\mathcal{E}_2 + P_2}{\rho_2} - \frac{\mathcal{E}_1 + P_1}{\rho_1} \quad (3.51)$$

Logo,

$$H_3 = h_2 - h_1,$$

onde h_1 e h_2 denotam as entalpias específicas das camadas 1 e 2.

As equações de movimento (Eqs. 3.39) formam um sistema de equações diferenciais acopladas e não lineares que podem ser representadas simbolicamente pela equação:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.52)$$

com

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \ddot{R}_1 \\ \ddot{R}_2 \\ \ddot{m}_1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} Q_1 & B_1 & H_1 \\ Q_2 & B_2 & H_2 \\ Q_3 & B_3 & H_3 \end{pmatrix}$$

Da Equação 3.52, obtemos as acelerações através da equação matricial:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}, \text{ onde } \mathbf{M}^{-1} \text{ é a matriz inversa de } \mathbf{M},$$

que nos permite integrar numericamente as equações de movimento. Usamos para isso, o método de integração numérica de Runge-Kutta-Fehlberg [5]

3.6 Equações de Estado

Para integrarmos as equações de movimento obtidas na seção anterior, de modo a obtermos a descrição da evolução dinâmica do colapso gravitacional, precisamos especificar a equação de estado da matéria estelar como função das densidades de massa, sendo que, nas duas primeiras, devemos entrar com a pressão de cada camada enquanto que, na terceira, além da pressão, precisamos entrar também com a densidade de energia interna das camadas.

Para se descrever as propriedades da matéria estelar desde o colapso até o *bounce* do caroço, precisamos de uma equação de estado que cubra um intervalo grande de densidade ($\approx 10^8 \text{ g/cm}^3$ a 10^{14} g/cm^3). Para isso, três equações de estado obtidas para diferentes regimes de densidade foram “costuradas”. Para densidades até a fase de gotejamento de nêutrons, $\rho \approx 4.3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, consideramos que a matéria fria estelar é composta por uma

rede de núcleos e um gás de elétrons relativísticos. Neste regime, a equação de estado BPS – Baym, Pethick e Sutherland [6] é usada. No próximo regime, o subnuclear com nêutrons gotejados, duas equações foram usadas, a equação BBP - Baym, Bethe e Pethick [7] se não considerarmos os neutrinos confinados e a GB - Gudmundsson e Buchler [8] se considerarmos os neutrinos confinados. Para o regime hadrônico com densidades de saturação nuclear ou mais, vamos usar a equação de estado proposta no capítulo 4, obtida a partir da QHD, quando então, construiremos a transição de fase da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons que se imagina existir no interior das estrelas de nêutrons.

Fazendo a evolução dinâmica para as mesmas configurações, mas usando as duas equações de estado, uma sem neutrinos confinados e outra com neutrinos confinados nos permitirá estudar de que forma o confinamento de neutrinos pode afetar a dinâmica do colapso gravitacional, a energia da onda de choque emergente durante o *bounce*.

3.7 A Condição Inicial

Para o cálculo da evolução dinâmica do colapso gravitacional, determinada pela equação $\mathbf{Ma} = \mathbf{F}$, precisamos determinar a condição inicial do sistema, ou seja, definir os valores das coordenadas generalizadas R_1, R_2 e m_1 , e das velocidades generalizadas \dot{R}_1, \dot{R}_2 e \dot{m}_1 no instante $t = 0$.

Suporemos que ambas as camadas são compostas por núcleos de ^{56}Fe , distribuídos numa rede cristalina e imersos num gás de elétrons degenerados. Estas condições são suficientes para que o caroço seja altamente instável a contrações gravitacionais, pois o índice adiabático é de aproximadamente 4/3 (Apêndice E).

No equilíbrio estático, a energia cinética é nula ($\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = \dot{m}_1 = 0$). Portanto a energia total do sistema descrito acima é dada por:

$$H = W + \mathcal{E}$$

A energia interna \mathcal{E} é obtida através da relação termodinâmica

$$P = n_B^2 \frac{\partial(\mathcal{E}/n_B)}{\partial n_B}$$

que, integrada, dá a expressão

$$\mathcal{E}/n_B = \int_{\ln n_{B_0}}^{\ln n_B} \frac{P}{n_B} d \ln n_B + \mathcal{E}/n_{B_0},$$

nos fornecendo a energia por bárion em função da densidade bariônica (número de bárions por unidade de volume). A integral é resolvida numericamente, sendo n_{B_0} uma densidade fixa de referência igual a $0.6295 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$. A constante de integração \mathcal{E}/n_{B_0} corresponde ao valor da energia por bárion em $n_B = n_{B_0}$ para um gás de elétrons excluindo-se a energia de repouso destes últimos.

Fixando-se o valor de m , a massa total do sistema, podemos determinar os raios iniciais e a partição de massa entre as duas camadas minimizando-se a energia total do caroço em relação a R_1 , R_2 e m_1 , isto é, resolvendo-se simultaneamente as equações:

$$\frac{\partial H}{\partial R_1} \delta R_1 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial R_2} \delta R_2 = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial m_1} \delta m_1 = 0$$

Na prática, a energia foi minimizada por métodos numéricos. A massa total m para o caroço foi fixada e valores para os raios e massas das camadas foram arbitrados de modo a serem compatíveis com os de uma anã branca. Uma sub-rotina apropriada foi usada para determinar as coordenadas R_1 , R_2 e m_1 do mínimo absoluto da superfície gerada por H , conseguindo-se assim a configuração de equilíbrio.

Para a construção da configuração inicial, foi usada uma equação de estado de um gás de elétrons degenerados com fração elétron-próton constante e igual à do ^{56}Fe (~ 0.46) sem incluir a energia de repouso dos elétrons. Tal equação de estado é dada por [1]:

$$P_e = 1.42180 \times 10^{25} \phi(x) \text{ erg/cm}^3, \text{ onde } P_e \text{ é a pressão dos elétrons e}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) (1 + x^2)^{1/2} + \ln \left[x + (1 + x^2)^{1/2} \right] \right\},$$

sendo $x = \frac{p_F}{m'c}$ o parâmetro relatividade, com p_F sendo o momento de Fermi, m' a massa da partícula e c a velocidade da luz.

Foi usada também a correção da rede que deve ser somada à energia do gás de elétrons dada pela equação [1],

$$\frac{E_R}{Z} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{2/3}$$

Esta equação de estado com correção de rede é ligeiramente diferente da equação de estado BPS.

3.8 Acionamento do Colapso Gravitacional

Dada a condição inicial do problema, o segundo passo é acionar o colapso gravitacional, que é feito ao se “ligar” a equação de estado BPS à configuração de equilíbrio. Tal mudança na equação de estado é suficiente para, fixando-se as massas e densidades das

duas camadas, se obter uma redução tanto da densidade de energia interna quanto da fração leptônica das camadas, causando uma despressurização do gás. Como o sistema é instável ($\Gamma \approx 4/3$), o equilíbrio hidrostático é rompido em favor da força gravitacional.

A integração numérica das equações de movimento permite acompanhar a evolução dinâmica do sistema desde o início do colapso até alguns centésimos de segundos após o *bounce* e a reflexão da segunda camada.

Acionada a implosão do caroço pelo mecanismo de captura eletrônica, a evolução temporal subsequente do sistema será governada pelas equações de movimento obtidas através da representação lagrangiana efetiva e com as quais podemos obter a cada passo da integração numérica os valores de R_1 , R_2 e m_1 e de suas respectivas velocidades e acelerações em cada instante t .

Separa-se todo o processo da dinâmica em duas fases: a fase de colapso gravitacional, que é um processo adiabático, isentrópico e, no nosso caso, isotérmico (aproximação $T = 0$), e a fase pós-*bounce*, na qual predominam certos processos dissipativos como a dissociação de núcleos que ocorre durante a propagação da onda de choque gerada no *bounce*. Estes processos dissipativos podem reduzir a intensidade da onda de choque a ponto dela não conseguir provocar uma explosão. Portanto, a aproximação de temperatura zero adotada neste trabalho para a fase pós-*bounce* não é razoável. Contudo isto não afeta em nada a validade do formalismo proposto aqui.

Transição de Fase da Matéria Estelar Hadrônica para Plasma de Quarks e Glúons

4.1 Introdução

Nesse trabalho, construiremos a transição de fase considerando, na fase hadrônica, todo o octeto bariônico e o quarteto Δ , e na fase de plasma os quarks u , d e s . Durante a transição da fase de hádrons para a fase de plasma de quarks, as duas fases coexistem no mesmo *background* de léptons (elétrons e múons e seus respectivos neutrinos). Para a descrição da fase hadrônica, utilizaremos uma teoria relativística de campo médio, que descreve de forma efetiva a interação entre os campos bariônicos e os campos mesônicos escalar, vetorial e isovetorial. Consideraremos também uma interação efetiva [1] na fase de quarks desconfinados. Para se obter de forma correta a equação de estado para as duas fases puras e também para a fase de transição, são necessários três vínculos entre todas as variáveis do sistema: a conservação da carga bariônica total, da carga elétrica e da fração leptônica (este último devido ao confinamento dos neutrinos). No regime de coexistência entre as duas fases, além dos vínculos mencionados, devemos impor também as condições de Gibbs para as pressões e os potenciais químicos das duas fases.

4.2 Transição de Fase de Primeira Ordem com Mais de Duas Cargas Conservadas

Um dos aspectos mais interessantes de um sistema que possui apenas uma componente é que quando ele sofre uma transição de fase de 1ª ordem* ele apresenta uma fase mista onde as duas fases coexistem sob pressão constante. Mas, se o sistema apresenta mais de uma carga conservada, a pressão não permanece constante na fase mista, o que é amplamente discutido por Norman K. Glendenning, no artigo "*First-order phase transition with more than one conserved charge: Consequences for neutron stars*" [2]. As cargas conservadas podem ser compartilhadas pelas duas fases em equilíbrio em concentrações diferentes daquelas originais. Consequentemente, a densidade de energia não é uma função linear da proporção, como é para uma substância simples, mas varia com a proporção. Logo, a pressão interna não permanece constante enquanto o corpo passa de uma fase pura para outra. É claro que para cada proporção, a pressão é a mesma para cada fase em equilíbrio. Todas as outras propriedades na fase mista são funções não lineares da proporção.

Transição de fase de 1ª ordem é aquela em que $\Delta\rho \neq 0$ e transição de fase de 2ª ordem é aquela em que $\Delta\rho = 0$, onde ρ é a densidade de energia.

Os critérios de Gibbs para o equilíbrio entre duas fases de um sistema que sofre uma transição de 1ª ordem e que possui apenas uma carga conservada, como por exemplo, o número de moléculas são:

$$\text{Equilíbrio químico: } \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

$$\text{Equilíbrio térmico: } T_1 = T_2 = T \quad (4.1)$$

$$\text{Equilíbrio mecânico: } p_1 \equiv p(\{\phi_1\}, \mu, T) = p(\{\phi_2\}, \mu, T) \equiv p_2$$

Os índices 1 e 2 indicam as duas fases; p é a pressão; T a temperatura; μ o potencial químico e $\{\phi_i\}$ denota a variável interna que caracteriza uma solução para as equações dinâmicas do sistema, excluindo o potencial químico na fase i a uma temperatura T . Se existirem m variáveis internas,

$$\{\phi\} = \phi^1, \dots, \phi^m, \quad (4.2)$$

elas satisfazem as equações dinâmicas:

$$D_j(\{\phi\}, \mu, T) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

O sistema sofre uma transição de fase de 1ª ordem, se e somente se existir uma solução μ para as Eqs.(4.1) com $\{\phi_1\} \neq \{\phi_2\}$. A densidade da carga cujo potencial químico é μ é diferente nas duas fases, uma vez que a função $\rho(\{\phi\}, \mu)$ é uma função diferente de μ pois as variáveis internas $\{\phi\}$ são diferentes nas duas fases. Chamamos estas densidades constantes de ρ_1 e ρ_2 :

$$\rho_1 \equiv \rho(\{\phi_1\}, \mu, T), \quad \rho_2 \equiv \rho(\{\phi_2\}, \mu, T) \quad (4.4)$$

Isto é verdadeiro para outras funções de μ , como a densidade de energia. As únicas propriedades que são necessariamente comuns às duas fases em equilíbrio são aquelas indicadas pelos critérios de Gibbs, e elas são constantes para todas as densidades do intervalo $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$. A fase mista é uma mistura das duas fases que ocupam diferentes volumes no espaço. Devido ao fato das densidades das cargas conservadas serem diferentes e fixas nas duas fases em equilíbrio (Eq. 4.4), as fases contribuem para a densidade média na proporção das próprias fases, ou seja:

$$\rho = (1 - \zeta)\rho_1 + \zeta\rho_2, \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (4.5)$$

Esta é a diferença essencial entre a transição de fase em sistemas simples e complexos. No sistema complexo as forças internas têm liberdade de alcançar as densidades de carga mais energeticamente favoráveis em cada fase nas devidas proporções consistentes com as leis de conservação. Para o sistema simples, a densidade de cada fase em equilíbrio continua fixa para todas as proporções e são determinadas pelas Eqs. (4.4), uma vez que os critérios de Gibbs sejam satisfeitos.

Já que a pressão não depende da proporção de cada fase em um sistema simples, as fases serão separadas por qualquer campo externo, como por exemplo a gravidade, que distingue as diferentes densidades.

Ilustrando a transição de fase da matéria composta por nêutrons para a composta por quarks que ocorre em estrelas compactas como se ocorresse em um sistema simples, a Fig.4.1 mostra como essa transição é tratada ao negligenciar-se o equilíbrio β , ou seja, considerando-se uma estrela composta puramente de nêutrons. Os bárions presentes na estrela são os nêutrons e os quarks u , d , s não têm massa o que faz com que ambas as fases tenham carga neutra e que haja apenas um potencial químico: aquele para o número bariônico. Essas considerações transformam o sistema complexo em simples. A pressão e o potencial químico de equilíbrio entre as fases é dado pela interseção entre as duas curvas sólidas:

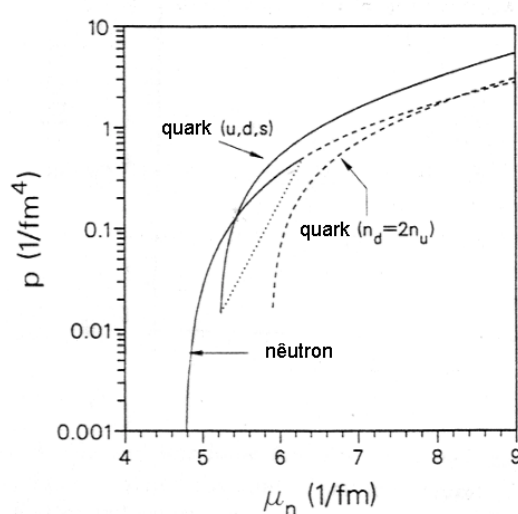


Figura 4.1 - Pressão em função do potencial químico para uma transição de 1ª ordem (linhas sólidas). O ponto de interseção é o ponto de equilíbrio entre as fases. A linha pontilhada é esquemática e a tracejada representa o caso em que se considera que os puros nêutrons do caroço são convertidos em quarks u e d , e nenhum em s . Fonte: [2].

A linha pontilhada mostra esquematicamente o modo como a pressão evoluiria como função do potencial químico se ocorresse uma transição de fase de 1ª ordem em um corpo para o qual existisse uma teoria completa para as variáveis internas que o descrevem. Nesse exemplo, usou-se modelos diferentes para cada fase. A Fig.4.2 mostra a constância da pressão e do potencial químico e a dependência linear da densidade de energia com a densidade na fase mista. A pressão constante da fase mista na presença de um campo gravitacional tem como consequência a separação das duas fases pela gravidade, e cada uma fica com uma fase pura. A fase mista em uma densidade não pode sustentar a fase mista em outra densidade uma vez que a pressão exercida por cada uma é a mesma para uma substância simples em equilíbrio entre as suas duas fases. As equações de estrutura estelar garantem que a pressão é uma função contínua do raio de Schwarzschild e decresce monotonicamente a partir do centro da estrela; logo, os dois pontos extremos da fase mista onde as pressões são iguais estão no mesmo ponto radial na estrela. Consequentemente, para uma substância simples, não existem estrelas estáveis com densidades centrais dentro dos limites das densidades da fase mista, e para as estrelas com densidades centrais acima daquele limite, a distribuição de matéria como função da coordenada radial sofre uma descontinuidade, caindo de ρ_2 para ρ_1 no raio onde a pressão iguala àquela do equilíbrio de fases. Estes aspectos estão ilustrados nas Fig. 4.3 e 4.4

pelas linhas tracejadas. As linhas sólidas correspondem à estrelas em equilíbrio β que sofrem uma transição de fase de 1ª ordem com conservação do número bariônico e da carga elétrica.

Toda a discussão acima foi baseada na desconsideração do equilíbrio β na fase hadrônica. Assumindo-se que os quarks u , d , s têm massas iguais, a fase de quarks fica trivialmente em equilíbrio e com carga neutra.

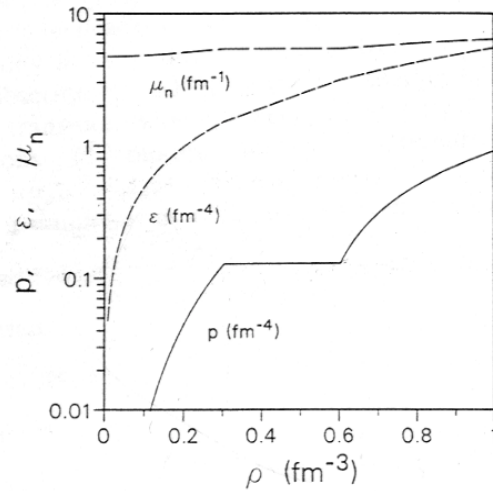


Figura 4.2 Pressão, densidade de energia e potencial químico quando só existe uma única carga conservada. A região plana em P e μ é a fase mista. Fonte: [2].

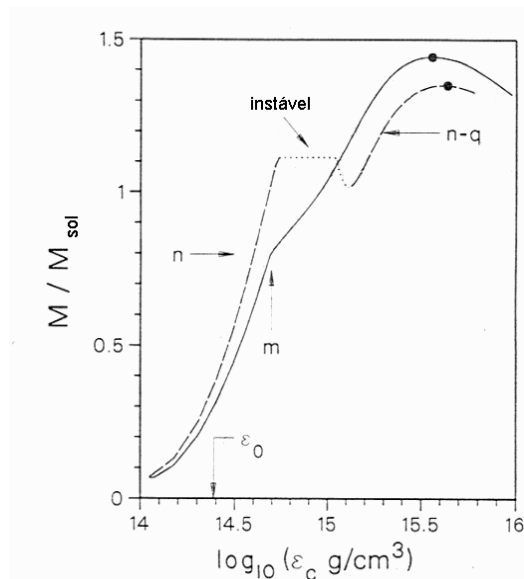


Figura 4.3 A linha pontilhada interrompida por pontos representa a família de estrelas de um único potencial químico (caso idealizado). Na região n estão as estrelas de puros nêutrons e na região n-q estão as estrelas de camadas externas de nêutrons e caroços de quarks. A linha sólida representa a família de estrelas compactas em equilíbrio β (dois potenciais químicos); estrelas abaixo de m são estrelas de nêutrons; estrelas acima de m têm caroços de matéria mista. Fonte: [2].

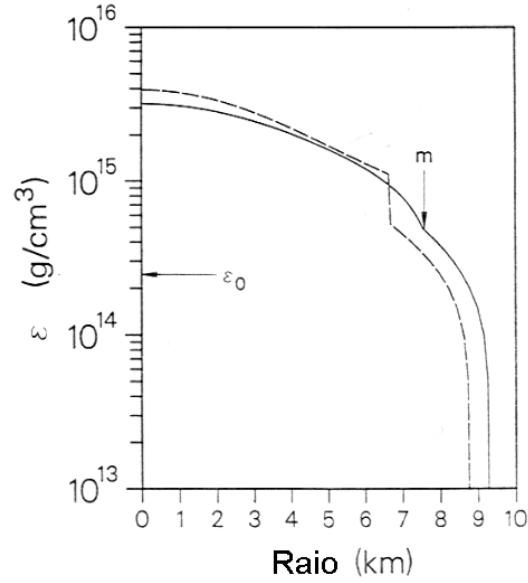


Figura 4.4 A linha tracejada representa uma estrela com um único potencial químico com massa limite da figura anterior. O caroço é feito de matéria pura de quarks e o exterior de nêutrons puros. A curva sólida representa uma estrela no limite de massa em equilíbrio β . O caroço está na fase mista de matéria hadrônica e de quarks. O exterior está na fase de matéria de estrela de nêutrons. O ponto de divisão é dado por m . Fonte: [2].

Os potenciais químicos são usados para expressar as condições de equilíbrio de um sistema composto por várias componentes. As leis de conservação referem-se à quantidade de cada componente independente ou carga conservada com os quais o sistema foi inicialmente preparado. Chamamos as n cargas ou números de cada componente independente de Q_α ($\alpha = a, b, \dots, n$). Logo, o potencial químico de todas as substâncias pode ser escrito como uma combinação linear de tantos potenciais químicos independentes quanto forem as leis de conservação. Iremos chamá-los de $\mu_a, \mu_b, \dots, \mu_n$. Os coeficientes na combinação linear se referem ao número de quantidades conservadas que a componente possui. Os números não são necessariamente inteiros. As cargas elétricas e bariônicas dos quarks são números fracionários.

Um corpo com duas fases distintas, 1 e 2, pode sofrer uma transição de fase se e só se

- As m equações dinâmicas para as estruturas internas

$D_j (\{\phi\} \mu_a, \dots, \mu_n, T) = 0$, $j = 1, \dots, m$, tiverem duas soluções simultâneas distintas para as variáveis internas,

$$\{\phi\} \equiv \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m, \quad (4.6)$$

de modo que

$$\{\phi_1\} \neq \{\phi_2\}, \quad (4.7)$$

onde

$$D_j (\{\phi_1\} \mu_a, \dots, \mu_n, T) = 0, \quad (4.8)$$

$$D_j(\{\phi_2\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (4.9)$$

- As soluções forem sujeitas às importantes leis de conservação que serão discutidas em seguida;

- Os critérios de Gibbs forem satisfeitos.

A distinção entre as fases é tal que as variáveis internas $\{\phi\}$ que descrevem o corpo ocupam regiões diferentes do espaço interno, e é isso o que se quis dizer com a desigualdade (4.7). Essas variáveis internas, que são soluções das equações dinâmicas, são funções do potencial químico e da temperatura. Os critérios de Gibbs para o equilíbrio de fases em uma temperatura fixa T quando há n cargas conservadas é:

$$\mu_{1,a} = \mu_{2,a} = \mu_a$$

⋮

$$\mu_{1,n} = \mu_{2,n} = \mu_n \quad (4.10)$$

$$T_1 = T_2 = T$$

$$p(\{\phi_1\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) = p(\{\phi_2\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T)$$

A pressão é a mesma função nos dois lados da última equação, mas é avaliada em regiões diferentes, de modo que os dois lados da equação são funções diferentes do potencial químico. Essa equação não é suficiente para especificar a pressão e os potenciais químicos no equilíbrio de fases. Se ocorrer uma transição de fase de 1ª ordem, a pressão como função de um dos potenciais químicos se comportará localmente como se o sistema possuísse apenas um componente. Seja este potencial químico μ_a . Geralmente pensa-se em variar o volume do sistema através de agentes externos a uma temperatura constante. Isso corresponde a variar as n densidades das cargas conservadas, Q_α/V , $\alpha = a, b, \dots, n$, e conseqüentemente, variar os potenciais químicos, dentre eles, o μ_a . É claro que enquanto o sistema está em uma fase pura, as razões entre as densidades não se modificam.

As n leis de conservação para as densidades de carga das fases puras 1 e 2 são:

$$q_\alpha(\{\phi_1\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) = Q_\alpha/V, \quad (4.11)$$

$$q_\alpha(\{\phi_2\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) = Q_\alpha/V \quad (\alpha = a, \dots, n) \quad (4.12)$$

Seja a fase 1 a fase de baixa densidade. Podemos encontrar as propriedades desta fase pura escolhendo um volume ou uma densidade, por exemplo, $q_a \equiv Q_a/V$ e resolvendo o sistema de equações (4.8) e (4.11) para as m variáveis internas $\{\phi_1\}$ e os n μ 's de cada volume, e então calcular a pressão $p(\{\phi_1\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T)$ e qualquer outra quantidade de interesse. Haverá assim $m + n$ equações e o mesmo número de incógnitas.

A igualdade dos potenciais químicos na fase de equilíbrio requer um exame detalhado. Em primeiro lugar estudamos as extremidades da fase mista, onde a proporção de uma das fases é muito pequena. Então, vamos para a região intermediária. Começamos com o corpo na fase 1, e aumentemos a pressão. A uma determinada pressão e volume correspondente V_1 , partes do corpo irão começar a sofrer a transição de fase. O corpo é dito estar na fase mista. A uma pressão imediatamente abaixo as condições de conservação ainda são expressas como para a fase pura 1 através da Eq.(4.11) porque a quantidade de matéria na fase 2 é desprezível. Neste ponto, as condições de conservação, as equações dinâmicas (4.8) e os critérios de Gibbs para a pressão de equilíbrio expressa na Eq.(4.10), produz as $m + n + 1$ equações que especificam o volume V_1 , os valores dos n potenciais químicos, e as m variáveis internas correspondentes ao estado do corpo no cenário da transição de fase. Do mesmo modo, a fase mista pode ser alcançada através da fase 2. Um sistema equivalente de equações define a fronteira entre as fases pura e mista. A Eq.(4.9) substitui a Eq.(4.8) e a Eq.(4.12) substitui a Eq.(4.11), e elas, juntamente com os critérios de Gibbs definem o volume V_2 correspondente à extremidade superior da fase mista, juntamente com as variáveis internas e potenciais químicos desta fronteira. Temos então dois conjuntos diferentes de equações que definem o estado do sistema nos dois extremos da fase mista, e as suas soluções $V, \{\phi\}, \mu_a, \dots, \mu_n$ serão diferentes em geral. Consequentemente, os potenciais químicos e as pressões, apesar de iguais em cada fase em equilíbrio, são diferentes nas duas extremidades da fase mista, como as densidades das cargas conservadas.

Falta ainda descrever a fase mista para uma proporção arbitrária das duas fases. Escolhe-se um volume V dentro do limite $V_1 \geq V \geq V_2$. Seja $1 - \zeta$ a fração do volume ocupado pela fase 1 e ζ o volume ocupado pela fase 2. As leis de conservação escritas através das Eqs.(4.11) e (4.12) para as fases puras agora devem ser escritas como uma única equação para cada carga que concerne às duas fases:

$$(1 - \zeta)q_\alpha (\{\phi_1\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) + \zeta q_\alpha (\{\phi_2\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) = Q_\alpha / V, \quad (4.13)$$

com $(\alpha = a, \dots, n)$

As equações que governam o sistema na fase mista são as $2m$, ou melhor, as m equações dinâmicas (Eqs.(4.8) e (4.9)) para a solução das m variáveis internas $\{\phi_i\}$ de cada fase ($i = 1, 2$), as n leis de conservação (Eq.(4.13)), e os critérios de Gibbs para os n potenciais químicos e a proporção ζ . Logo, há $2m + n + 1$ equações simultâneas que descrevem o estado do corpo na fase mista, incluindo a proporção ζ de fases. Se uma solução existe para o volume escolhido ou densidade de cargas, com $0 < \zeta < 1$ e $\{\phi_1\} \neq \{\phi_2\}$ ela representa o estado do corpo na fase mista.

Na fase mista a Eq.(4.13) é a única maneira de expressar as leis de conservação consistentemente com o equilíbrio de fase de Gibbs. Aplicando as Eqs.(4.11) e (4.12) separadamente aos volumes de cada fase $(1 - \zeta)V$ e ζV geralmente assegura-se que os potenciais químicos sejam diferentes nas duas fases. Além disso, há n condições a mais do que variáveis.

Para compreender a natureza especial de uma transição de fase de 1ª ordem de um sistema com mais de uma carga conservada, é importante notar que as razões das densidades de carga Q_α / V nas fases puras são constantes, uma vez que o sistema foi preparado com um número específico de cada tipo de carga. Entretanto a razão entre as cargas ou componentes

pode ser diferente em cada uma das fases no equilíbrio. Apenas a soma das cargas nas duas fases precisa se conservar (Eq. (4.13)). Assim, compreendemos o papel das forças internas, incluindo a energia de Fermi, de otimizar as proporções de cargas na fase de equilíbrio, de modo a minimizar a energia livre do sistema. Isto está implícito nas soluções simultâneas da Eqs.(4.8)-(4.10) e (4.13). Para um sistema com n cargas conservadas, existem $n-1$ concentrações, ou graus de liberdade que as forças internas possuem quando duas fases estão em equilíbrio. Em particular, não há tal liberdade para um sistema que só tem uma única carga conservada ou uma única componente independente. Assim, em geral, os dois sistemas de equações descritos acima possuem soluções diferentes, de modo que a pressão não permanece constante enquanto o corpo muda de uma fase pura para outra, e da mesma forma, todos os potenciais químicos mudam. A pressão e os potenciais químicos da fase mista mudam continuamente à medida que a proporção das fases em equilíbrio muda em um sistema complexo.

Uma vez que as $2m+n+1$ equações (Eqs. (4.8)-(4.10) e (4.13)) são resolvidas simultaneamente, todas as outras quantidades aditivas podem ser calculadas através da regra expressa aqui para a densidade de carga correspondente à lei de conservação:

$$q_a = (1 - \zeta)q_a(\{\phi_1\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) + \zeta q_a(\{\phi_2\}, \mu_a, \dots, \mu_n, T) \quad (4.14)$$

Como consequência da variação do potencial químico com as proporções de cada fase, todas as outras propriedades aditivas tais como densidade e densidade de energia também variam, mas não necessariamente de uma maneira linear com a proporção ζ . Comparando as Eqs. 4.5 e 4.14, percebe-se que na primeira a densidade tem um valor fixo em cada fase, correspondente ao único valor do potencial químico no equilíbrio, enquanto na segunda todas as densidades de carga variam com as proporções das fases. Todos estes aspectos de uma transição de fase de 1ª ordem em um sistema com mais de uma carga conservada são diferentes daqueles correspondentes ao sistema de apenas uma carga conservada com exceção da descontinuidade das densidades através da interface entre as duas fases em equilíbrio, que é o que distingue uma transição de 1ª da de 2ª ordem. Entretanto, a magnitude da descontinuidade no caso geral varia com a proporção das fases em equilíbrio.

No caso de uma carga conservada, a pressão como função do potencial químico para esta carga tem a forma conhecida de uma curva como a mostrada na Fig.4.1. O ponto de intercessão corresponde aos valores de equilíbrio da pressão e do potencial químico numa dada temperatura. Imagine agora um terceiro eixo correspondente a um potencial químico adicional, como mostra a Fig. 4.5. Puxe a curva como se fosse uma folha elástica nessa nova direção. É claro que o deslocamento não tem que necessariamente ser paralelo e a superfície terá uma forma irregular. O ponto de intercessão **A**, da pressão nas duas fases puras se torna a curva **AA'**; as duas fases em cada ponto da curva têm potenciais químicos e pressões iguais, como exigido pelo equilíbrio, mas em geral, eles variam ao longo da curva. Nem todos os pontos da curva representam estados fisicamente acessíveis, dadas as leis de conservação. Para uma melhor compreensão disso, consideraremos as fases puras homogêneas. As leis de conservação (Eqs. 4.11 e 4.12) para cada fase pura descreve uma curva no plano do potencial químico parametrizado pelo volume V . A projeção de cada uma destas curvas sobre a superfície de pressão da fase correspondente descreve uma curva em cada superfície. Segmentos delas são **a0** e **1b**. Nestas curvas, o corpo está nas fases puras 1 e 2 respectivamente, e satisfaz as leis de conservação. Pontos diferentes das curvas correspondem a diferentes volumes ou densidades de uma dada carga. O equilíbrio de fases é possível apenas quando cada uma destas curvas cruza a curva de intercessão de pressão, **AA'**. Devemos compreender que a figura representa a superfície da pressão apenas na vizinhança

de onde ocorre a transição de fase, e deve haver outras regiões do potencial químico onde há apenas uma superfície de pressão e apenas uma fase. Quando há distinção de fases, os pontos nos quais as duas curvas definidas pelas leis de conservação cruzam a curva AA' em 0 e 1 geralmente não serão coincidentes e definirão os extremos de uma fase mista. A proporção da fase 2 no ponto 0 é zero e no ponto 1 é total. A proporção varia entre estes valores ao longo da curva 01 . Esta é a curva do equilíbrio de fases. Geralmente, a pressão e os potenciais químicos variam ao longo dela do mesmo modo que suas densidades de carga correspondentes.

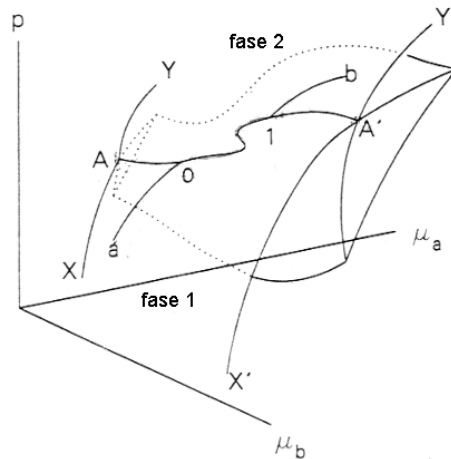


Fig. 4.5 – Esquema da pressão em função de μ_a, μ_b , no caso mais geral de duas cargas conservadas. A pressão física é mostrada pela curva $a0$ (fase pura 1), 01 (fase mista) e $1b$ (fase pura 2). Fonte [2]

É claro que em cada ponto da curva de intercessão, que corresponde à alguma proporção definida de fases, todas estas quantidades são iguais por todo o corpo, como as condições de equilíbrio exigem. Esta construção serve para ilustrar o porquê de uma transição de fase de 1ª ordem com mais de uma carga conservada ser tão diferente de uma com apenas uma. Quando existe mais de uma carga conservada, o equilíbrio de fase é possível quando a pressão como função dos potenciais químicos independentes tem a topologia da forma genérica ilustrada.

A variação da pressão com a proporção das fases em equilíbrio é, talvez, a diferença que traz mais consequências e pode levar a estrelas compactas estruturalmente diferentes, nas quais a transição de matéria hadrônica confinada para matéria de quarks ocorre, das que seriam obtidas em aproximações que tratam a estrela como um sistema simples de apenas uma carga conservada (número bariônico).

4.3 Fase de Hádrons

Descreveremos a fase hadrônica usando o modelo de Zimanyi-Moszkowski [3]. Este modelo sugere uma mudança na forma do acoplamento entre os campos bariônicos e o campo escalar σ . A densidade lagrangiana generalizada usada no modelo de Zimanyi-Moszkowski é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} = & \sum_B \left\{ \left(1 + \frac{g_{\sigma B} \sigma}{m_B} \right) \bar{\Psi}_B \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_{\omega B} \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_\mu \tau \cdot \rho^\mu \right] \Psi_B - \bar{\Psi}_B m_B \Psi_B \right\} \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} \rho_{\mu\nu} \cdot \rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \cdot \rho^\mu + \\
& \sum_\lambda \bar{\Psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \Psi_\lambda
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde Ψ_B representa o operador de campo bariônico, σ o campo escalar, ω_μ o campo vetorial e ρ_μ o campo isovetorial. No capítulo 2 vimos que

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$$

e

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - g_{\rho B} \rho_\mu \times \rho_\nu.$$

Os léptons são descritos pelos operadores de campo Ψ_λ e $g_{\sigma B}$, $g_{\omega B}$ e $g_{\rho B}$ são as constantes de acoplamento entre os campos bariônicos e os respectivos campos mesônicos.

Sabendo que prótons e nêutrons não são os únicos bárions importantes na equação de estado, faremos a inclusão de todo o octeto bariônico além do quarteto Δ levando em conta o acoplamento entre os campos bariônicos e os campos mesônicos escalar, vetorial e isovetorial. Assim, a soma em B na equação acima se estende a todas as espécies de bárions considerados: $B = n, p, \Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-, \Xi^0, \Delta^-, \Delta^0, \Delta^+, \Delta^{++}$ e a soma em λ se refere aos léptons e, ν_e, μ, ν_μ .

Os campos bariônicos podem ser transformados segundo a relação

$$\Psi_B = \left[1 + \frac{g_{\sigma B} \sigma}{m_B} \right]^{-1/2} \bar{\Psi}_B, \tag{4.16}$$

o que faz com que a Lagrangiana fique sem o fator $(1 + g_{\sigma B} / m_B)$ e as massas dos bárions sejam todas substituídas pelas massas efetivas

$$m_B^* = \left(1 + \frac{g_{\sigma B} \sigma}{m_B} \right)^{-1} m_B. \tag{4.17}$$

Da lagrangiana (4.15), obtemos as equações de Euler-Lagrange para os campos, que resultam nas equações de movimento para todos os operadores hadrônicos de campo. Aplicando-se a seguir a aproximação de campo médio aos operadores mesônicos de campo

presentes nas equações de movimento obtidas (na forma como foi descrito em capítulo anterior), todos os campos mesônicos são substituídos por seus respectivos valores médios relativos ao estado fundamental do sistema [3;6;7]. Nesta aproximação, a teoria é vista como uma teoria efetiva onde as constantes de acoplamento são ajustadas a propriedades da matéria nuclear ou núcleos finitos, mas não às interações entre nucleons no vácuo. Em virtude da simetria de translação e de rotação da matéria nuclear infinita, subsiste para o campo ω_μ apenas a componente temporal ω_0 com valor médio não nulo. Analogamente, para o méson isovetorial ρ_μ apenas a componente temporal ρ_{03} associada ao méson ρ neutro possui valor médio não nulo (veja o Capítulo 2 para maiores detalhes). Com estas aproximações e simetrias, as equações de movimento para os valores clássicos dos operadores mesônicos podem ser escritas como :

$$\sigma = \sum_B \frac{g_{\sigma B}}{m_\sigma^2} \left(1 + \frac{g_{\sigma B} \sigma}{m_B} \right)^{-2} \langle \bar{\Psi}_B \Psi_B \rangle, \quad (4.18)$$

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega B}}{m_\omega^2} \langle \Psi_B^+ \Psi_B \rangle \quad (4.19)$$

e

$$\rho_{03} = \sum_B \frac{g_{\rho B}}{m_\rho^2} \langle \Psi_B^+ \tau_3 \Psi_B \rangle. \quad (4.20)$$

Observemos que as fontes dos campos mesônicos presentes nas equações acima dependem explicitamente dos campos bariônicos, cujas dinâmicas são governadas pela seguinte equação de movimento:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_{\omega B} \gamma_0 \omega^0 - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_0 \tau_3 \rho^{03} - m_B^*) \Psi_B = 0. \quad (4.21)$$

Aplicando-se a solução de onda plana para o operador de campo bariônico, apresentada no capítulo 2, às Eqs.4.18-20, obtemos

$$\sigma = \sum_B \frac{g_{\sigma B}}{m_\sigma^2} \left(1 + \frac{g_{\sigma B} \sigma}{m_B} \right)^{-2} \left(\frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \right) \int_0^{k_B} \frac{m_B^*}{[k^2 + m_B^{*2}]^{1/2}} k^2 dk, \quad (4.22)$$

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega B}}{m_\omega^2} \frac{(2J_B + 1)}{6\pi^2} k_B^3 = \sum_B \left(\frac{g_{\omega B}}{m_\omega^2} n_B \right) \quad (4.23)$$

e

$$\rho_{03} = \sum_B \frac{g_{\rho B}}{m_\rho^2} I_{3B} \frac{(2J_B + 1)}{6\pi^2} k_B^3, \quad (4.24)$$

onde

$$n_B = \langle \Psi_B^+ \Psi_B \rangle = \frac{(2J_B + 1)}{2\pi^2} \int_0^{k_B} k^2 dk = \frac{(2J_B + 1)}{6\pi^2} k_B^3$$

é o número de bárions B por unidade de volume, I_{3B} é a projeção do isospin do estado de carga do bárion B , J_B o spin e k_B o momento de Fermi da espécie bariônica. A tabela 4.1 lista os números quânticos, as cargas e as massas dos bárions.

Tabela 4.1: Números quânticos, massas e cargas de alguns bárions

Bárion	m (MeV)	J_B	I	I_{3B}	q
N	938	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	+1
				$-\frac{1}{2}$	0
Λ	1116	$\frac{1}{2}$	0	0	0
Σ	1193	$\frac{1}{2}$	1	+1	+1
				0	0
				-1	-1
Δ	1232	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$	+2
				$+\frac{1}{2}$	+1
				$-\frac{1}{2}$	0
				$-\frac{3}{2}$	-1
Ξ	1318	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
				$-\frac{1}{2}$	-1

A equação de movimento para os operadores de campo dos léptons consiste na equação de Dirac para férmions livres, dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\lambda) \Psi_\lambda = 0,$$

a qual indica a ausência do acoplamento entre os campos leptônicos e bariônicos. Assim, os léptons contribuem para a energia do sistema como um gás ideal de Fermi. Contudo, vínculos entre os graus de liberdade bariônicos e leptônicos devem ser introduzidos através da condição de equilíbrio beta e do balanço químico para os canais de interação fraca. Neste sentido, o primeiro vínculo a ser imposto é a conservação do número bariônico total do sistema, que se expressa por

$$\rho = \sum_B n_B, \quad (B = n, p, \Lambda, \{\Sigma\}, \{\Delta\}, \{\Xi\}) \quad (4.25)$$

sendo ρ a densidade bariônica total. Outro vínculo diz respeito a neutralidade da carga elétrica total da matéria estelar, e que se escreve:

$$0 = \sum_B q_e n_B - n_e - n_\mu, \quad (4.26)$$

onde q_e é a carga elétrica do bárion. Esta equação estabelece a conservação da carga elétrica do sistema, vinculando as densidades das partículas com estado de carga diferente de zero.

Por fim, o confinamento dos neutrinos [10] antes dos processos de interação fraca impõem o seguinte vínculo de conservação das frações leptônicas eletrônica e muônica:

$$Y_{L_e} = \frac{n_e + n_{\nu_e}}{\rho} = cte, \quad (4.27)$$

e

$$Y_{L_\mu} = \frac{n_\mu - n_{\nu_\mu}}{\rho} = 0. \quad (4.28)$$

Neste trabalho adotaremos $Y_{L_e} = 0,4$ para o valor da fração leptônica eletrônica, de acordo com resultados de cálculos de colapso gravitacional. Entretanto, o valor exato depende de vários parâmetros como a taxa de captura eletrônica, opacidade da matéria a neutrinos, etc., cujos valores apresentam incertezas.

Notemos que as duas equações anteriores nos fornecem as seguintes relações imediatas entre as densidades do mesmo setor leptônico:

$$n_{\nu_e} = Y_{L_e} \cdot \rho - n_e \quad (4.29)$$

e

$$n_\mu = n_{\nu_\mu} \quad (4.30)$$

A energia de Gibbs por unidade de volume, para temperatura $T = 0$, é dada por

$$g = \sum_i \mu_i n_i - P, \quad (4.31)$$

onde P é a pressão do sistema, μ_i o potencial químico e n_i a densidade da i -ésima espécie. A minimização de g à pressão constante resulta em

$$\delta g = \sum_i \mu_i \delta n_i = 0 \quad (4.32)$$

Usando-se as Eqs. (4.25) e (4.26), esta última equação nos fornece as equações de balanço químico envolvendo os potenciais químicos das partículas:

$$\mu_B = q_B \mu_n - q_e (\mu_e - \mu_{\nu_e}), \quad (4.33a)$$

e

$$\mu_e = \mu_\mu + \mu_{\nu_e} + \mu_{\bar{\nu}_\mu}. \quad (4.33b)$$

onde q_B e q_e são, respectivamente, a carga bariônica e a carga elétrica (em unidades da carga do elétron) do bárion B . Estas equações de balanço correspondem aos seguintes canais de decaimento para os bárions:

$$B \leftrightarrow n - q_e e^- + q_e \nu_e. \quad (4.34)$$

$$e^- \leftrightarrow \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \quad (4.35)$$

Observemos que pelas Eqs. (4.33) os potenciais químicos dos nêutrons e dos elétrons podem ser selecionados como os dois únicos potenciais químicos independentes já que o vínculo de conservação da fração leptônica implica em que os potenciais μ_μ , μ_{ν_e} e $\mu_{\bar{\nu}_\mu}$ estejam correlacionados com μ_e .

Assim, as equações para os campos mesônicos e bariônicos discutidas anteriormente fornecem uma descrição relativística consistente da interação forte entre os constituintes hadrônicos, que incluem explicitamente, mesmo que de forma efetiva, a interação entre hádrons do sistema. Por outro lado, embora o acoplamento entre os campos bariônicos e leptônicos não esteja presente na densidade lagrangiana (4.15), as equações de balanço químico dadas pela Eq. (4.33) são fundamentais, pois permitem descrever de forma termodinamicamente consistente os processos de interação fraca presentes no sistema.

O potencial químico de cada espécie bariônica B é o autovalor da equação de movimento para os campos bariônicos (Eq. 4.21), isto é,

$$\mu_B = g_{\omega B} \omega_0 + g_{\rho B} \rho_{03} I_{3B} + (k_B^2 + m_B^{*2})^{1/2}. \quad (4.36)$$

Para os léptons massivos

$$\mu_e = (k_e^2 + m_e^2)^{1/2} \quad (4.37)$$

e

$$\mu_\mu = (k_\mu^2 + m_\mu^2)^{1/2}, \quad (4.38)$$

e para os neutrinos $\mu_{\nu_e} = k_{\nu_e}$ e $\mu_{\bar{\nu}_\mu} = k_{\bar{\nu}_\mu}$. As densidades leptônicas são escritas também em função dos momentos de Fermi como

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} k_e^3, \quad (4.39)$$

$$n_\mu = \frac{1}{3\pi^2} k_\mu^3, \quad (4.40)$$

$$n_{\nu_e} = \frac{1}{6\pi^2} k_{\nu_e}^3 \quad (4.41)$$

$$n_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{1}{6\pi^2} k_{\bar{\nu}_\mu}^3. \quad (4.42)$$

Cabe observar que o critério para que os níveis de Fermi para uma dada espécie bariônica comecem a ser povoados é dado por

$$q_B \mu_n \geq \mu_B (k_B = 0) + q_e (\mu_e - \mu_{\nu_e}), \quad (4.43)$$

ou

$$q_B \mu_n \geq m_B^* + g_{\omega B} \omega_0 + g_{\rho B} \rho_{03} I_{3B} + q_e (\mu_e - \mu_{\nu_e}), \quad (4.44)$$

enquanto que o decaimento do elétron em múons exige que

$$\mu_e \geq m_\mu + \mu_{\nu_e}. \quad (4.45)$$

Notemos que das Eqs (4.22, 4.23, 4.24, 4.36, 4.37 e 4.38), os momentos de Fermi dependem das variáveis internas de campo $\sigma, \omega_0, \rho_{03}$ e dos dois potenciais químicos independentes μ_n, μ_e para as cargas conservadas bariônica e elétrica, de modo que as expressões para as densidades de carga e densidade bariônica, na fase hadrônica estão de acordo com as dependências citadas na Eq. (4.11). Isto completa a descrição das equações que definem a solução da lagrangiana para matéria de carga neutra em equilíbrio, chamada matéria de estrela de nêutrons.

As equações de movimento para os campos mesônicos juntamente com as equações de conservação da carga bariônica e da carga elétrica, constituem um sistema de cinco equações acopladas. Adotando-se como variável independente a densidade bariônica ρ , o sistema de equações pode ser resolvido pelo método da autoconsistência para um valor fixo de ρ , obtendo-se para esta densidade os valores médios dos campos mesônicos $\sigma, \omega_0, \rho_{03}$ e os momentos de Fermi dos nêutrons e dos elétrons, k_n e k_e . Todas as demais variáveis do sistema são obtidas usando-se as equações de balanço químico.

Finalmente, conforme foi discutido no capítulo 2, a densidade de energia e a pressão do sistema são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ & + \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_B} (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} k^2 dk + \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_\lambda} (k^2 + m_\lambda^2)^{1/2} k^2 dk \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{03}^2 \\ & + \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \int_0^{k_B} \frac{k^4}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk + \frac{1}{3} \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_\lambda} \frac{k^4}{(k^2 + m_\lambda^2)^{1/2}} dk \end{aligned} \quad (4.47)$$

Existe um estado de equilíbrio que consiste num número igual de nêutrons e prótons. As constantes de acoplamento são ajustadas de modo que as propriedades para este estado correspondam àquelas da matéria nuclear simétrica. Os valores das constantes de acoplamento do modelo usadas neste trabalho foram tiradas da Ref. [2], os quais valores para elas são ajustadas pelas seguintes propriedades da matéria nuclear saturada: densidade de saturação $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$, energia de ligação por nucleon $E/N_B = 16 \text{ MeV}$, massa efetiva do nucleon na densidade de saturação $m_N^* = 0.855 m_N$ e incompressibilidade da matéria nuclear saturada $K = 225 \text{ MeV}$. Explicitamente, as constantes de acoplamento para os nucleons são dadas por

$$\left(\frac{g_{\sigma N}}{m_\sigma} \right)^2 = 7.487 \text{ fm}^2, \quad \left(\frac{g_{\omega N}}{m_\omega} \right)^2 = 2.615 \text{ fm}^2, \quad \left(\frac{g_{\rho N}}{m_\rho} \right)^2 = 4.774 \text{ fm}^2,$$

sendo $m_\sigma = 550 \text{ MeV}$, $m_\omega = 783 \text{ MeV}$ e $m_\rho = 770 \text{ MeV}$.

Adotamos também neste trabalho, como na referência citada, o mesmo acoplamento entre os distintos campos bariônicos e mesônicos (acoplamento universal) ou seja, para $B \neq N$ ($N = n, p$),

$$\frac{g_{\sigma N}}{g_{\sigma B}} = \frac{g_{\omega N}}{g_{\omega B}} = \frac{g_{\rho N}}{g_{\rho B}} = 1$$

4.4 Fase de Quarks

A grande incerteza teórica na descrição da fase de quarks, até mesmo para decidir sobre a sua existência, é, sem dúvida a equação de estado. Não sabemos como é a equação de estado num intervalo grande de densidades (desde aproximadamente a densidade nuclear ρ_0 até $10\rho_0$) as quais são possivelmente atingidas numa estrela de nêutrons. Até hoje, infelizmente, não existe nenhuma teoria que cubra esse intervalo de densidades com relação aos graus de liberdade dos quarks. O modelo mais aplicado hoje é uma generalização do modelo de sacola do M.I.T. que inclui efeitos do meio [4]. Nessa referência, usou-se a técnica

de quasi-partículas tão bem conhecida em várias áreas da física, onde é aplicada com grande sucesso. A interação entre os quarks é implementada através da atribuição aos mesmos de uma massa efetiva dependente da densidade. Essa aproximação deve fornecer uma descrição mais realista da matéria de quarks que vai além da aproximação por um gás livre de Fermi utilizado em nosso trabalho de mestrado [8]. Na literatura, esse modelo [4] é referido como “modelo de sacola com massa efetiva”. Na referência [4] mostrou-se que os efeitos do meio aumentam a energia por bárion da matéria de quarks (com estranheza incluída) tornando portanto a fase de quarks menos favorável do ponto de vista energético. A razão física para um aumento de energia por bárion é a dependência da massa efetiva com a densidade deduzida em [4]. Ela aumenta com o aumento da densidade.

O modelo de sacola com massa, é uma técnica usada em várias áreas da Física, desde a Física do Estado Sólido até a Física Nuclear tradicional e relativística, para descrever de forma não perturbativa interações complexas e efeitos do meio como modos coletivos em sistemas de muitas partículas. A idéia básica é que as partículas de tais sistemas adquirem uma massa efetiva devido à interação com o resto do sistema. Adotando o esquema de quasi-partículas, efeitos do meio foram recentemente incorporados na equação de estado dos quarks no contexto do modelo de sacola do M.I.T. (Apêndice C). Nesse modelo, os quarks são considerados como quasi-partículas que adquirem uma massa efetiva devido à interação com outros quarks presentes no sistema. A massa efetiva aparece como um polo do propagador do quark iterado (e portanto não perturbativo) para potenciais químicos finitos, o qual é calculado na aproximação de densidade alta. Graficamente os processos que contribuem são:



O resultado desse cálculo é uma massa efetiva para os quarks dependente do potencial químico da seguinte maneira:

$$m_f^* = \frac{m_f}{2} + \sqrt{\frac{m_f^2}{4} + \frac{g^2 \mu_f^2}{6\pi^2}} \quad (4.48)$$

onde g é a constante de acoplamento forte para o plasma de quarks e glúons, μ_f é o potencial químico dos quarks, $f = u, d, s$ e $m_u = m_d = 0$ e $m_s = 150 MeV$ são as massas correntes adotadas para os quarks.

Note que as massas efetivas aumentam com a constante de acoplamento e também com o potencial químico. Esse é então, dentro deste esquema, o resultado das interações. O último ingrediente do modelo é a constante de sacola fenomenológica B introduzida da maneira usual e que supostamente simula a influência do confinamento e corresponde à diferença de energia entre o vácuo perturbativo dentro da fase de quarks desconfinada e o vácuo verdadeiro fora dela.

As equações de balanço químico na fase de quarks são dadas também pela equação $\mu_B = q_B \mu_n - q_e (\mu_e - \mu_{\nu_e})$ com $B = u, d, s$. Podemos explicitar estas equações como

$$\mu_u = \frac{1}{3} \mu_n - \frac{2}{3} (\mu_e - \mu_{\nu_e}), \quad (4.49)$$

e

$$\mu_d = \mu_s = \frac{1}{3}\mu_n + \frac{1}{3}(\mu_e - \mu_{\nu_e}). \quad (4.50)$$

Ao somarmos estas duas equações, obtemos uma relação fundamental entre o potencial químico dos nêutrons e os potenciais químicos dos quarks, dada por

$$\mu_n = \mu_u + 2\mu_d. \quad (4.51)$$

Em termos dos graus de liberdade da fase de quarks, é possível escrevermos também

$$\mu_u = \mu_d - \mu_e + \mu_{\nu_e} \quad (4.52)$$

Nesta fase, a conservação da carga bariônica é dada por

$$\rho = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s), \quad (4.53)$$

enquanto a conservação da carga elétrica se expressa pela equação

$$\frac{1}{3}(2n_u - n_d - n_s) - n_e - n_\mu = 0 \quad (4.54)$$

Notemos também que a conservação da fração leptônica total para a fase de quarks tem a mesma expressão da fase de hádrons.

Finalmente, as expressões da pressão e da densidade de energia para esta fase são dados por [1]

$$P_Q = -B + \sum_f P_f + \sum_l (P_l + P_{\nu_l}), \quad (4.55)$$

$$\varepsilon_Q = -P_Q + \sum_f \mu_f n_f + \sum_l \mu_l n_l + \sum_l \mu_{\nu_l} n_{\nu_l} \quad (4.56)$$

onde P_f é a pressão de gás de férmions livres e B é a constante de sacola, $l = e^-, \mu^-$ e $f = u, d, s$. Neste trabalho, variamos a constante de sacola dentro do intervalo $B = (100 - 250) \text{MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$.

4.5 Fase Mista

Para descrever a fase mista, a fração volumétrica da fase hadrônica (H) é representada por $1 - \zeta$, onde ζ é a fração volumétrica ocupada pela fase de quarks (Q) definida por

$$\zeta = \frac{V_Q}{V_Q + V_H}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (4.57)$$

As leis de conservação escritas anteriormente para as fases puras de hádrons e quarks, devem ser escritas agora através de equações envolvendo simultaneamente as duas fases. Assim, a conservação da carga bariônica total do sistema durante a transição se escreve como

$$\rho = (1 - \zeta)\rho_H + \zeta\rho_Q, \quad (4.58)$$

onde

$$\rho_H = \sum_B n_B, \quad (4.59)$$

e

$$\rho_Q = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s). \quad (5.60)$$

A conservação da carga elétrica global é dada por

$$0 = -n_e - n_\mu + (1 - \zeta)(n_p - n_{\Sigma^-} + n_{\Sigma^+} - n_{\Delta^-} + n_{\Delta^+} + 2n_{\Delta^{++}} - n_{\Xi^-}) + \frac{1}{3}\zeta(2n_u - n_d - n_s) \quad (4.61)$$

Por último, a conservação da fração leptônica eletrônica escreve-se agora como

$$Y_{L_e} = \frac{n_e + n_{\nu_e}}{(1 - \zeta)\rho_H + \zeta\rho_Q} = const. \quad (4.62)$$

E a densidade de energia da fase mista é função da fração volumétrica dos quarks desconfiados, isto é, $\varepsilon = (1 - \zeta)\varepsilon_H + \zeta\varepsilon_Q$. Observemos que os vínculos acima reduzem-se trivialmente às equações de conservação para as fases puras de hádrons se $\zeta = 0$ e para a de quarks se $\zeta = 1$.

Além dos vínculos de conservação impostos globalmente às duas fases, devemos impor também as condições de Gibbs, a $T = 0$, para os potenciais químicos

$$\mu_n = \mu_u + 2\mu_d,$$

e a condição de equilíbrio mecânico

$$P_H(\rho) = P_Q(\rho),$$

relacionando as pressões de cada fase.

A primeira condição de Gibbs já é intrinsecamente satisfeita pelas equações de balanço químico de cada fase, discutidas nas duas seções anteriores e que continuam válidas durante o regime de transição. Portanto, além das três equações para os campos mesônicos e das equações de conservação das cargas bariônica e elétrica, devemos resolver

simultaneamente a equação devida a segunda condição de Gibbs mostrada acima. Temos assim um sistema de seis equações acopladas.

Adotamos como variável independente a fração volumétrica ζ , de forma que a solução do sistema de equações para um valor fixo de ζ (variando no intervalo 0,1) nos fornece a densidade bariônica ρ , os valores médios dos campos mesônicos σ , ω_0 , ρ_{03} e os momentos de Fermi dos nêutrons e dos elétrons, k_n e k_e . De forma análoga ao procedimento usado para a fase pura de hádrons, todas as demais variáveis do sistema, para as duas fases, são obtidas usando-se as equações de balanço químico.

Frisemos que todas as equações apresentadas nesta e nas duas seções anteriores continuam válidas se os neutrinos forem considerados ausentes, bastando fazer-se $\mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = 0$.

Para ilustrar os métodos aqui utilizados, mostramos nas Figuras 4.6 e 4.7 o comportamento da densidade de energia e da pressão em função da densidade para as três fases, cobrindo um largo intervalo de densidade, com o objetivo de comparar o caso não realístico em que os neutrinos estão ausentes do sistema com o caso em que eles estão confinados. Em ambas as figuras a região entre as linhas verticais pontilhadas indica a região de transição de fase. Observa-se que a pressão e a densidade de energia são funções monotonicamente crescentes e contínuas da densidade bariônica. A transição é de 1ª ordem, mas a pressão não permanece constante em virtude da existência de mais de uma carga conservada. Percebe-se ainda que esta faixa é mais estreita para o caso de confinamento de neutrinos, o que será discutido mais detalhadamente no próximo capítulo.

As figuras 4.8 e 4.9 mostram as populações relativas ($Y_i = n_i / \rho$) em função da densidade para os mesmos casos mostrados nas duas figuras anteriores. Observe que no caso sem neutrinos, a fase pura de quarks é quase que completamente constituída de hádrons, i.e., é uma matéria pobre em léptons. Nota-se ainda que o número de quarks das três espécies é aproximadamente o mesmo e da ordem de $\rho/3$. No caso de confinamento de neutrinos, a situação muda e a fase pura de quarks fica rica em léptons (elétrons e neutrinos eletrônicos). Note também que durante a transição, a medida que a população de quarks u,d e s vai aumentando em virtude do desconfinamento das espécies bariônicas presentes, as populações relativas de bárions decrescem.

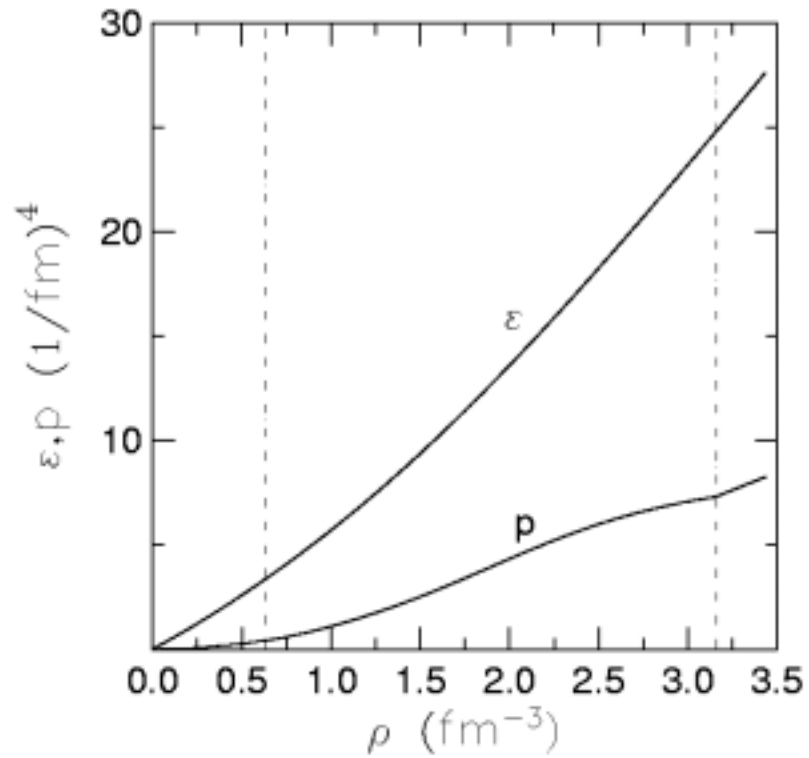


Figura 4.6 : Energia e pressão em função da densidade para as três fases para o caso sem neutrinos. A região entre as linhas verticais pontilhadas indica a região de transição. ($B=150$, $g=2.5$)

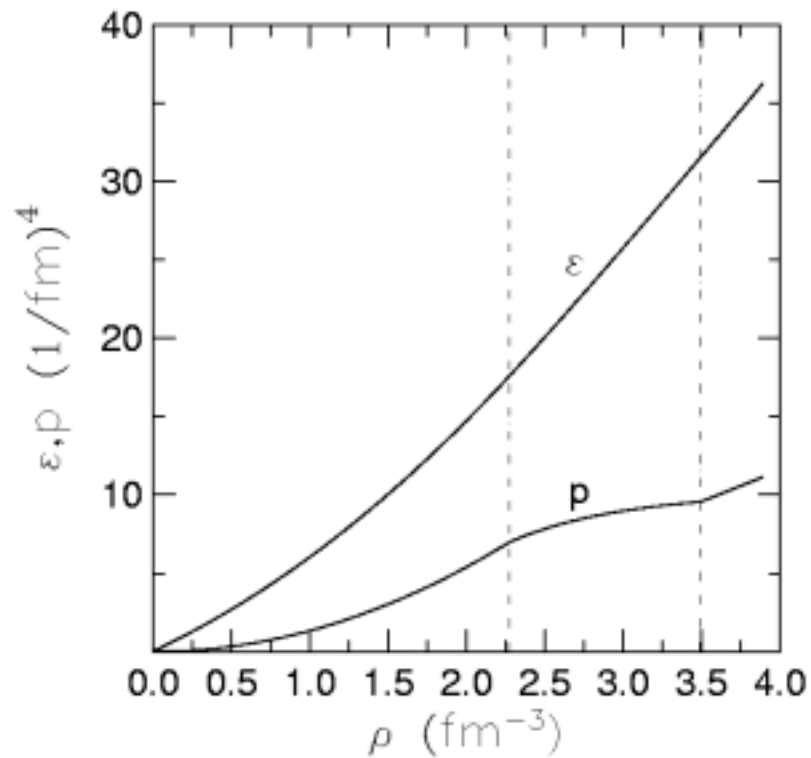


Figura 4.7 : Energia e pressão em função da densidade para as três fases para o caso de neutrinos confinados. A região entre as linhas verticais pontilhadas indica a região de transição. ($B=150$, $g=2.5$)

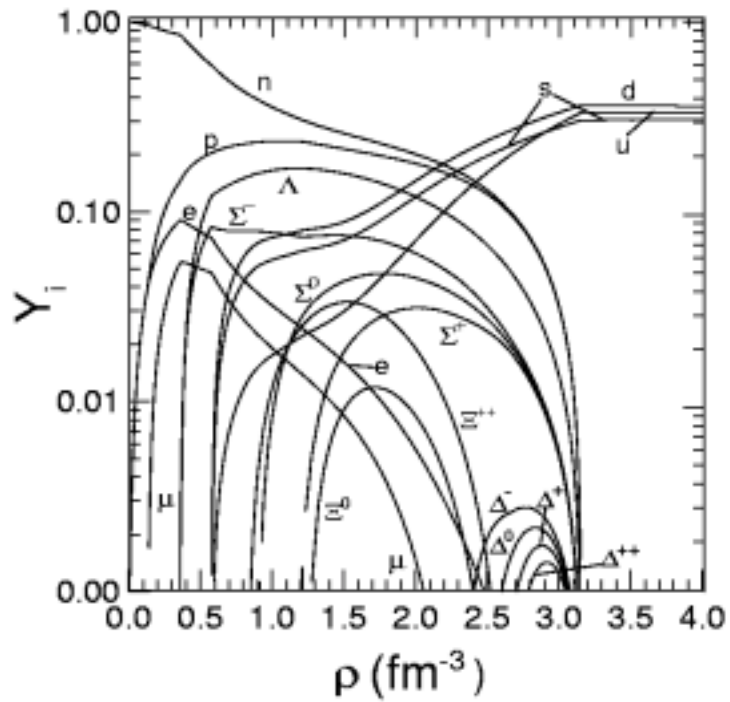


Figura 4.8 : Populações relativas ($Y_i = n_i / n_b$) em função da densidade para o caso sem neutrinos. ($B=150$, $g=2.5$)

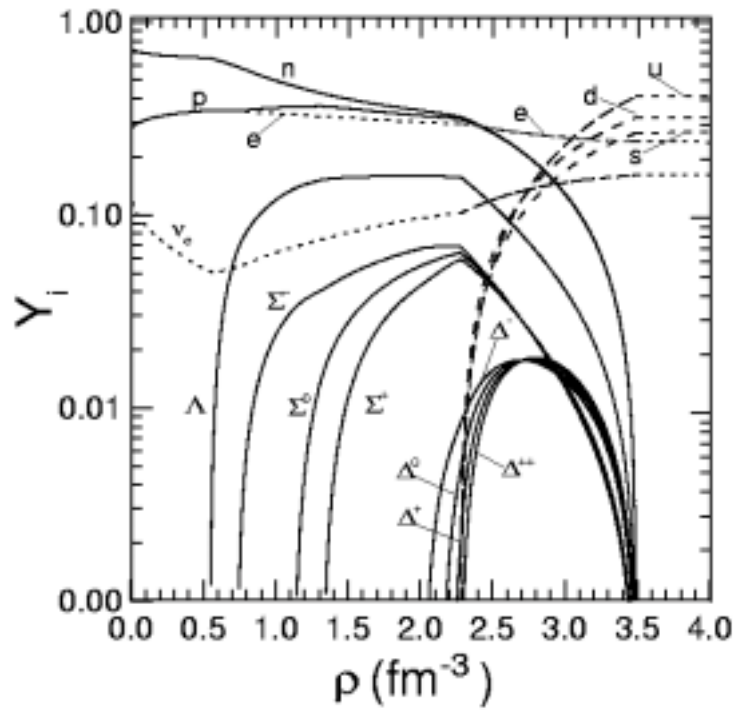


Figura 4.9 : Populações relativas ($Y_i = n_i / n_b$) em função da densidade para o caso de neutrinos confinados. ($B=150$, $g=2.5$)

Resultados e Conclusões

O objetivo principal deste trabalho é investigar a possibilidade de formação de um caroço híbrido num cenário de formação de onda de choque além de estudar as consequências do confinamento de neutrinos na transição de fase hádrons – quarks durante o processo do colapso-explosão.

5.1 Discussão dos Resultados

Para descrever as propriedades da matéria estelar desde o colapso até o *bounce* do caroço, necessita-se de uma equação de estado que seja adequada à uma faixa muito larga de densidades, desde aproximadamente 10^8 g/cm^3 até $\approx (2-5)\rho_0$ onde $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ é a densidade de saturação da matéria nuclear. Para este propósito, três equações de estado obtidas para diferentes regimes de densidade serão ligadas em nosso trabalho. Para densidades até o ponto de gotejamento de nêutrons, $\approx 4.3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, consideramos que a matéria estelar fria é composta por uma rede cristalina de núcleos e um gás de elétrons livres relativísticos e degenerados. Neste regime, a equação de estado descrita em [1] é usada. Para o regime subnuclear com nêutrons livres, usamos a equação de estado dada em [2] quando os neutrinos forem considerados ausentes, e no caso oposto usamos a equação de estado dada na Ref. [3] se os neutrinos forem considerados confinados. Para valores de densidades maiores que a densidade de saturação nuclear, usamos a equação de estado construída no capítulo anterior.

As equações de movimento para os raios das duas camadas, R_1 e R_2 , e a massa da camada interna, m_1 , obtidas no capítulo 3 são resolvidas numericamente para uma caroço típico de pré-supernova com massa total de $1.45 M_\odot$ composto de núcleos de ^{56}Fe e um gás de elétrons livres degenerados ($T=0$). A condição inicial é obtida minimizando-se numericamente a energia total de um caroço esférico de $1.24 M_\odot$ com duas camadas, por variações das variáveis R_1 , R_2 e m_1 , visando obter uma configuração de equilíbrio estático para o sistema. Com este procedimento, obtemos os valores iniciais dos raios e das massas das duas camadas do caroço de ^{56}Fe . O colapso gravitacional deste caroço é acionado pela adição de uma massa residual de $0.21 M_\odot$ à camada externa, totalizando assim uma massa total de $1.45 M_\odot$, e pela mudança da equação de estado de um gás puro de elétrons degenerados para a equação de estado usada neste trabalho. Estes dois fatores juntos fazem com que o equilíbrio estático seja rompido, dando partida ao colapso do sistema.

Em todas as figuras a seguir, mostraremos dois cenários, um com neutrinos confinados ($Y_{Le} = 0.4$), mostrado pelas linhas grossas e o outro sem neutrinos confinados ($Y_{Le} = 0$), mostrado pelas linhas finas ou pontilhadas.

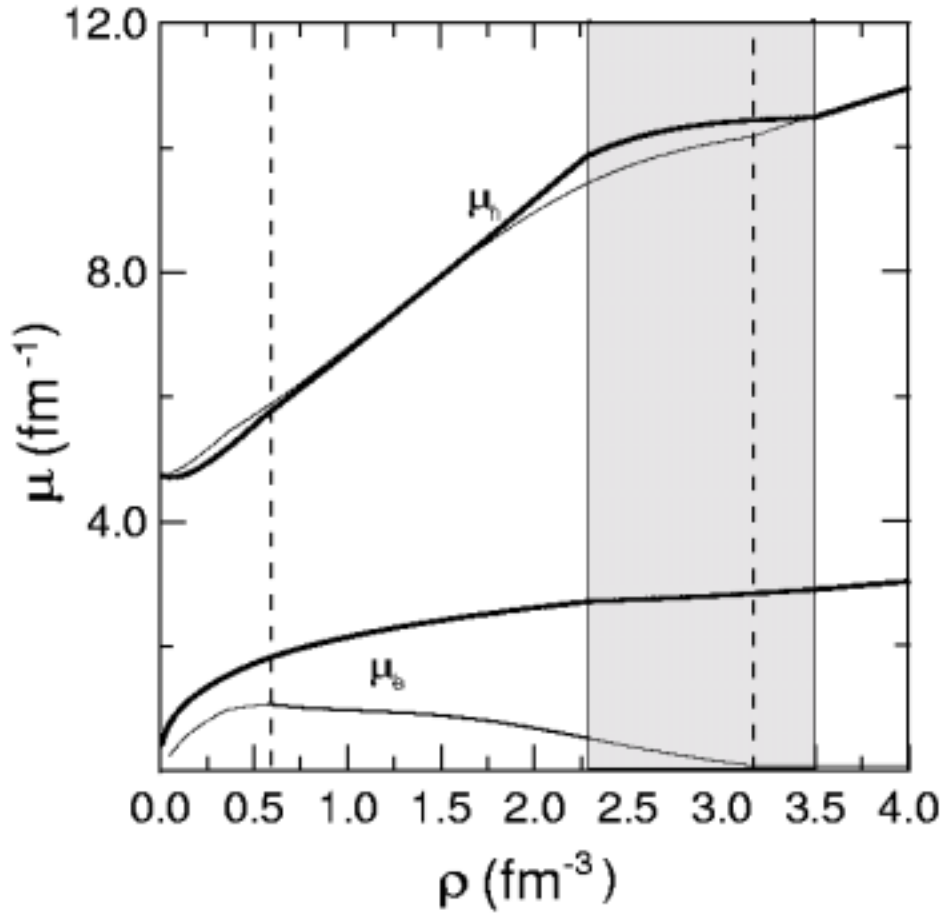


Figura 1: Potenciais Químicos dos nêutrons e elétrons em função da densidade bariônica ρ . Os parâmetros usados foram $B = 150 \text{ MeV} / \text{fm}^3$, $g = 2.5$, fração do neutrino eletrônico $Y_{\nu_e} = 0$ (linhas finas) e fração leptônica $Y_{L_e} = 0.4$ (linhas grossas).

Na Figura 1 mostramos os resultados obtidos para os parâmetros independentes, isto é, os potenciais químicos de nêutrons e elétrons como função da densidade bariônica, usando valores típicos de $B = 150 \text{ MeV} / \text{fm}^3$ e $g = 2.5$. Uma faixa de densidades mais estreita para a transição de fase mostrada pela parte sombreada na figura é obtida quando os neutrinos são confinados, situação bem diferente de quando os neutrinos não são confinados. Note que o valor da densidade de transição para o caso sem neutrinos confinados é de aproximadamente 0.6 fm^{-3} , valor muito menor do que $\sim 2.26 \text{ fm}^{-3}$, para o caso de neutrinos confinados, e portanto, dentro de uma faixa de densidade alcançada durante o colapso gravitacional. Entretanto, o valor da densidade no final da fase mista é menos afetado pela inclusão ou não de neutrinos. Esta é uma consequência direta do maior endurecimento da equação de estado na fase hadrônica se comparada à fase de quarks quando os neutrinos são confinados. Note que o confinamento de neutrinos leva ao endurecimento da equação de estado em ambas as fases. Entretanto, como os quarks u , d e s são partículas relativísticas leves, a pressão leptônica adicional é mais representativa na fase hadrônica do que na fase de plasma quando os neutrinos são confinados.

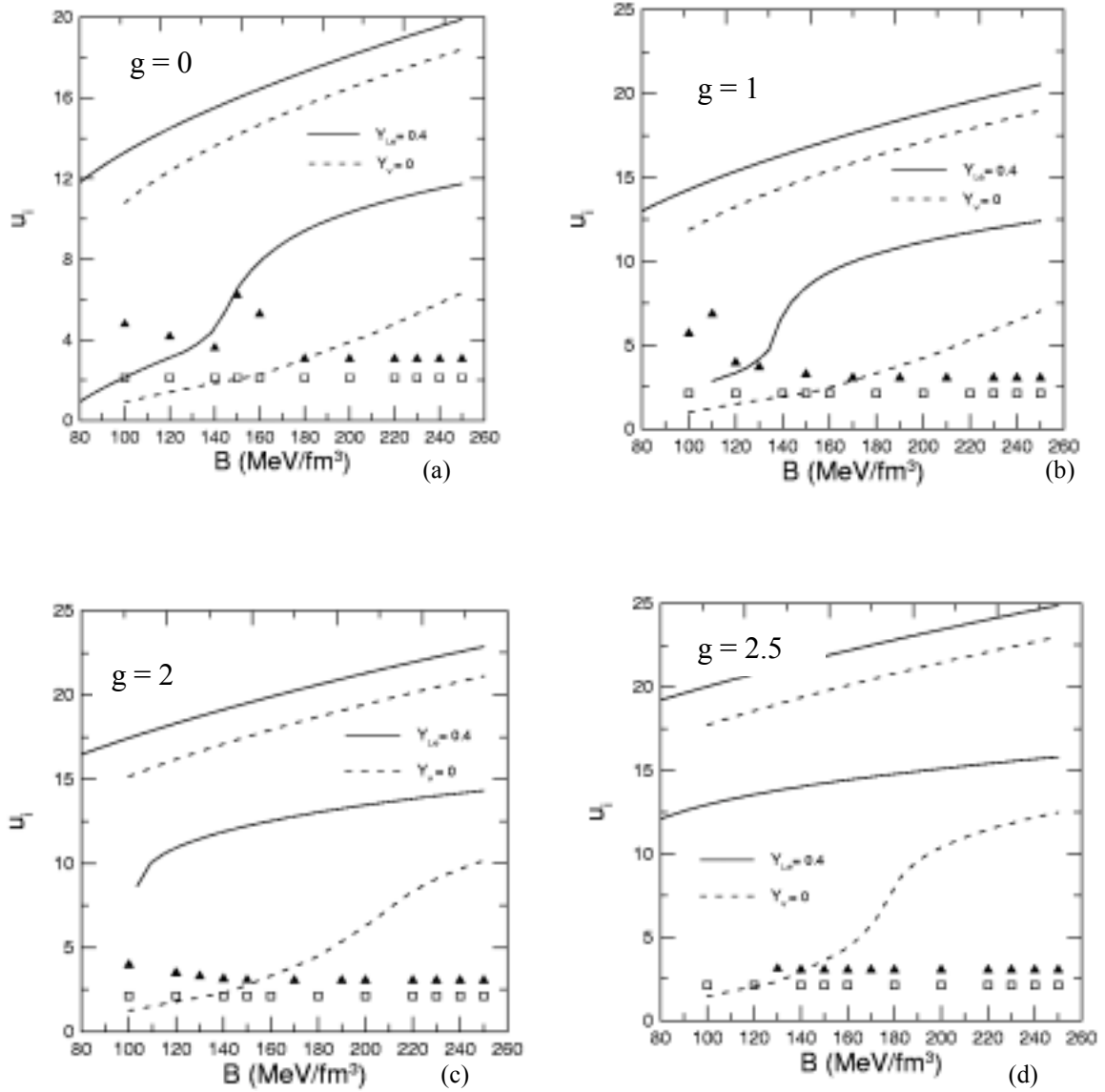


Figura 2: Densidades máximas em unidades de ρ_0 para as duas fases possíveis (hádrons e quarks) em função da constante de sacola B. Os quadrados representam a densidade máxima alcançada pelo caroço interno no bounce no caso de confinamento de neutrinos e os triângulos têm a mesma representação para o caso sem neutrinos.

Nas Figuras 2(a,b,c,d) mostramos a influência da constante de sacola B nos limites das fases, considerando para a fase de plasma de quarks e glúons alguns valores para a constante de acoplamento forte g . Em cada figura, as duas linhas superiores mostram as densidades bariônicas (em unidades da densidade de saturação nuclear ρ_0) nas quais a fase pura de quarks se inicia. As duas linhas inferiores mostram as densidades que separam a fase hadrônica pura da fase mista. Como podemos ver, o confinamento de neutrinos provoca dois efeitos: o deslocamento das coordenadas do ponto de transição para valores mais elevados da densidade bariônica e diminui a largura da faixa de densidades da fase mista se comparada ao caso sem neutrinos confinados. Ao mudarmos os valores de B e da constante de acoplamento, obtemos resultados qualitativamente semelhantes. Os quadrados representam a densidade máxima alcançada pelo caroço interno durante o *bounce* no caso de confinamento de neutrinos e os triângulos têm a mesma representação para o caso sem neutrinos. Isto ainda será discutido mais a frente.

Observa-se nas quatro figuras que compõem a Fig.2, que quanto maior a constante de acoplamento g , maiores se tornam as densidades limiares para o início da transição para o caso dos neutrinos confinados. Lembramos também que ao usarmos a equação de estado do modelo de sacola do M.I.T., com a inclusão de efeitos do meio, a interação entre os quarks é descrita dando a eles massas dependentes do potencial químico e da constante de acoplamento g . Devido ao aumento destas massas, a energia por bárion da matéria de quarks é aumentada, o que faz com que esta fase seja energeticamente menos favorável se comparada com a aproximação de gás livre de Fermi.

A Figura 3 ilustra o colapso adiabático para um caroço de massa total igual a $1.45 M_{\odot}$, onde a evolução temporal dos raios dos caroços interno (R_1) e externo (R_2) é mostrada. Observe que após o primeiro *bounce* do caroço interno uma forte onda de choque é gerada causando um evento de explosão representado por uma reversão súbita na velocidade da camada externa, levando à sua expansão. Um objeto compacto é formado de raio mínimo em torno de 8.5 km para o caso sem neutrinos e de 9.6 km para o caso de neutrinos confinados. Podemos notar também, que para o caso de neutrinos confinados, o *bounce* ocorre um pouco depois do que para o outro caso, pois a equação de estado é mais dura do que a do caso sem neutrinos. As densidades centrais do caroço alcançadas no instante do *bounce*, para ambos os casos, são mostradas na Fig.2 ($B = 150 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$), onde podemos observar que, para nenhum dos casos, a densidade de transição é alcançada, fazendo com que o sistema permaneça na fase pura de hádrons. Em outras palavras, com este modelo, o caroço remanescente, a proto-estrela de nêutrons, é formada por matéria hadrônica pura não importando se a equação de estado usada é a de neutrinos confinados ou não, para estes valores de B e de g .

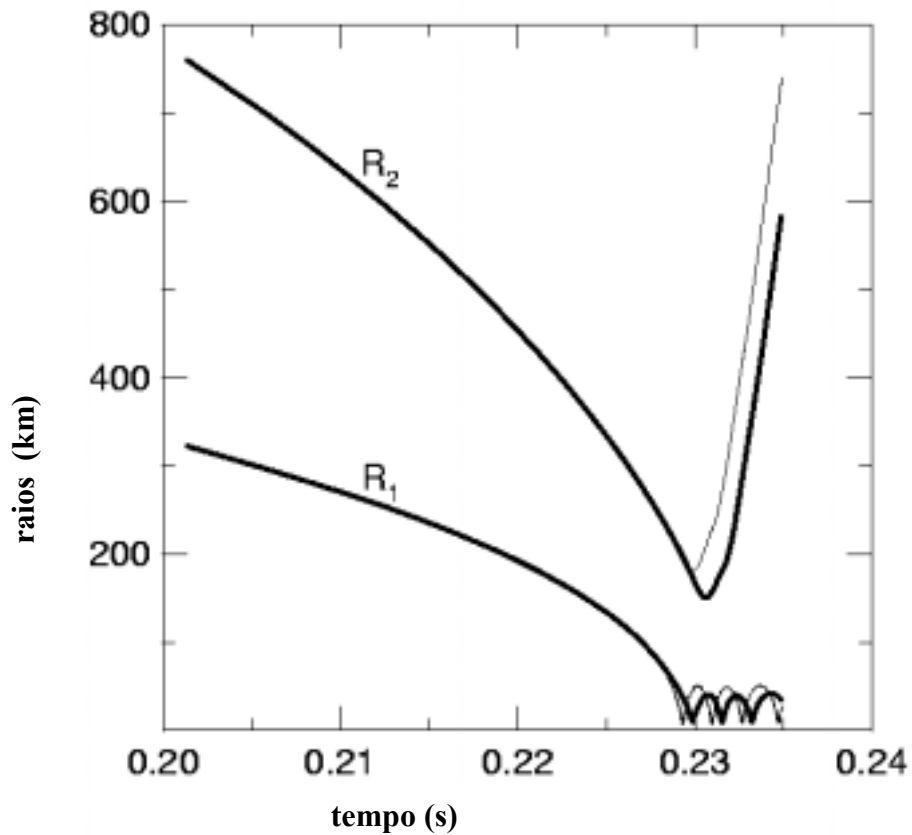


Figura 3: Raios dos caroços interno e externo em função do tempo para os casos de neutrinos confinados (linhas grossas) e livres (linhas finas). Os parâmetros usados foram $B = 150 \text{ MeV} / \text{fm}^3$, $g = 2.5$, $Y_{\nu_e} = 0$ e $Y_{L_e} = 0.4$.

A massa final do caroço interno é um parâmetro crucial para a estabilidade e estrutura de uma estrela compacta formada. Os valores obtidos para os dois casos (com e sem neutrinos confinados) são compatíveis com os dados observacionais para estrelas de nêutrons. A evolução temporal da massa do caroço interno é mostrada na Figura 4, onde os resultados dos cálculos são mostrados para os dois casos. Podemos ver que a massa da proto-estrela de nêutrons formada é um pouco menor para o caso de neutrinos ausentes. Entretanto, da Figura 3, notamos que, uma vez que a equação de estado do caso de neutrinos confinados é mais dura, o raio do caroço interno no primeiro *bounce* é maior do que na situação sem neutrinos confinados. A densidade do *bounce* do caroço interno para o caso sem neutrinos é maior do que no caso com neutrinos confinados, como mostra a Figura 2. Este cenário se repete em todos os casos analisados obtidos para várias configurações de massa inicial e parâmetros B e g da equação de estado.

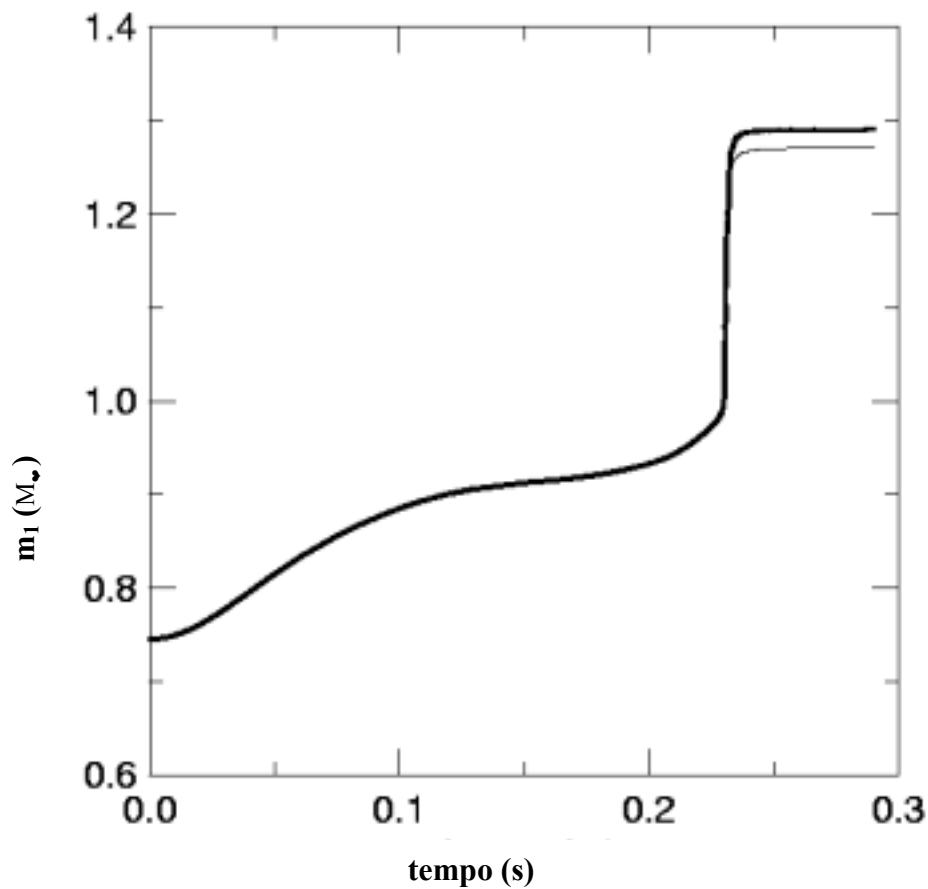


Figura 4: Evolução temporal da massa do caroço central para o caso de neutrinos confinados (linha grossa) e sem neutrinos (linha fina) com $B = 150 \text{ MeV} / \text{fm}^3$, $g = 2.5$, $Y_{\nu_e} = 0$, $Y_{L_e} = 0.4$.

A Figura 5 mostra a evolução temporal das energias totais, i.e., a soma das energias cinética, gravitacional e interna dos caroços interno (H_1) e externo (H_2). O sucesso da explosão depende da potência da onda de choque gerada no *bounce*. Vemos que a camada externa do caroço é ejetada devido à transferência de energia do caroço interno para o externo durante os *bounces*. Após o desacoplamento entre as camadas, a camada externa fica com a energia total positiva (energia cinética somada a energia interna maior do que a gravitacional),

da ordem de 20 foe ($1\text{foe} \equiv 10^{51}\text{erg}$), caracterizando um sistema não ligado, ao contrário da camada interna com a energia gravitacional maior do que a soma das outras duas. O caso que considera os neutrinos confinados é menos energético do que o que considera os neutrinos não confinados.

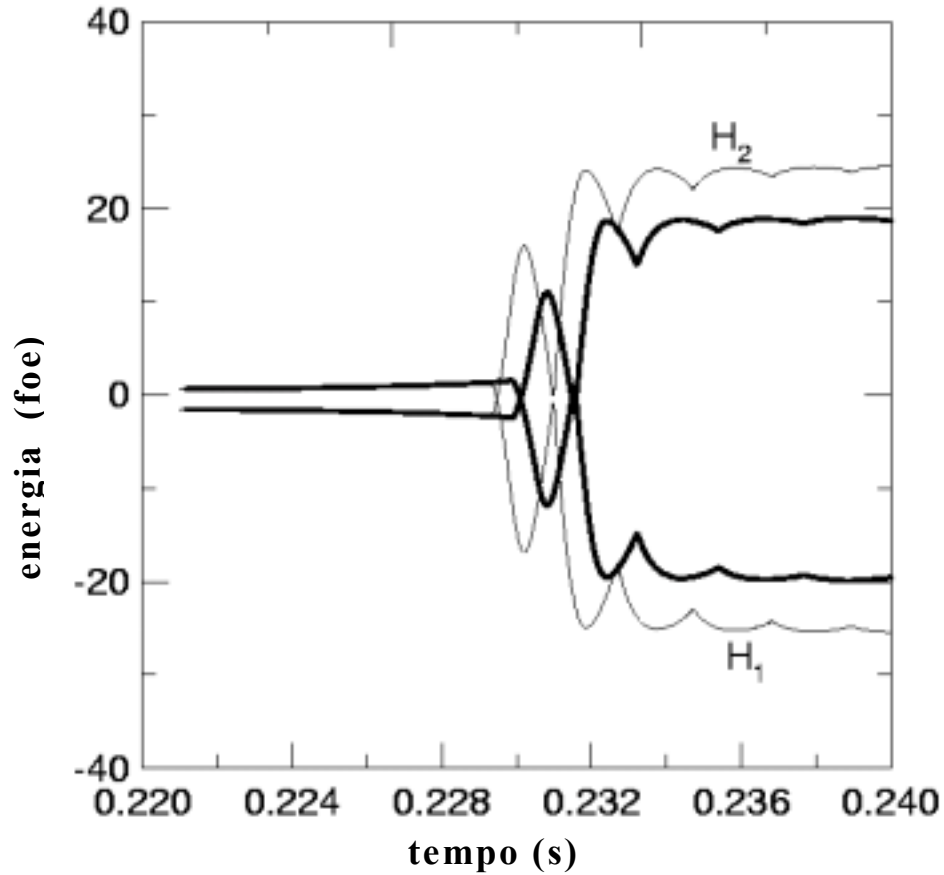


Figura 5: Evolução temporal da energia total dos caroços interno e externo dados em foe – $1\text{foe} = 10^{51}\text{erg}$.

As duas figuras a seguir mostram as velocidades relativas à velocidade do som no meio no referencial da interface entre as duas camadas, dadas por $u_1 = (v_1(R_1) - \dot{R}_1)/c_1$ e $u_2 = (v_2(R_1) - \dot{R}_1)/c_2$. A velocidade do som num meio líquido ou gasoso é dada por $c = \sqrt{K/\rho}$ onde $K = xp$ é o módulo de compressibilidade e p é a pressão do gás não perturbado e x , o expoente adiabático, é a razão entre os calores específicos C_p/C_v . Para haver formação de uma onda de choque, é necessário que esta velocidade relativa à camada interna seja menor que 1 e a relativa à camada externa seja maior do que 1, ou seja, o fluxo deve ser subsônico para a camada interna e supersônico para a externa. A Figura 6 mostra um fluxo subsônico para a camada interna e a Figura 7, um fluxo extremamente supersônico para a camada externa. Em ambos os casos os picos nas curvas correspondem ao primeiro *bounce*. Observe também que, para o caso sem neutrinos, o fluxo do material da camada externa é mais supersônico durante o *bounce* do que para o caso com neutrinos confinados.

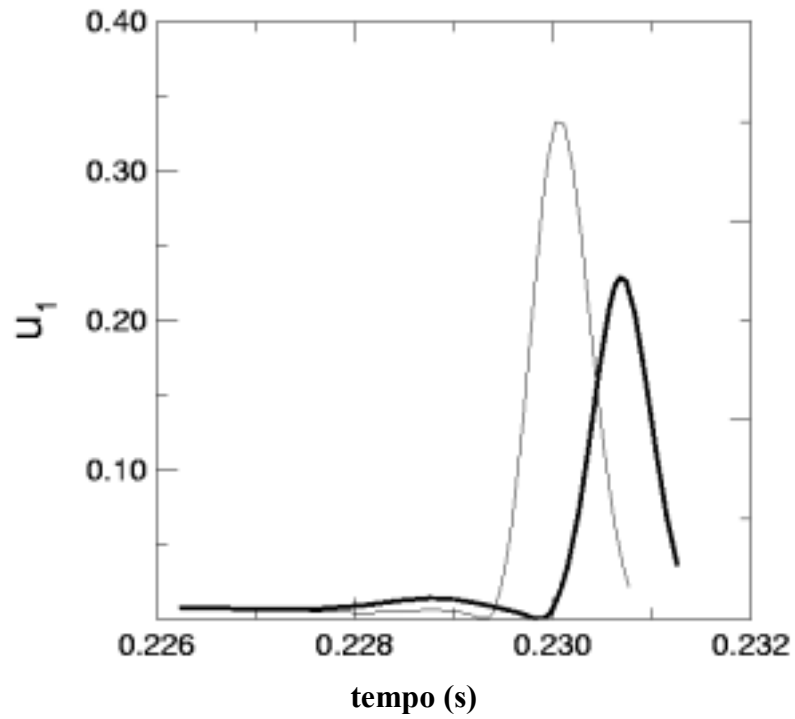


Figura 6: Velocidade de matéria em relação à superfície do caroço interno no cenário do bounce, mostrando um fluxo subsônico para a camada interna ($u_1 < 1$).

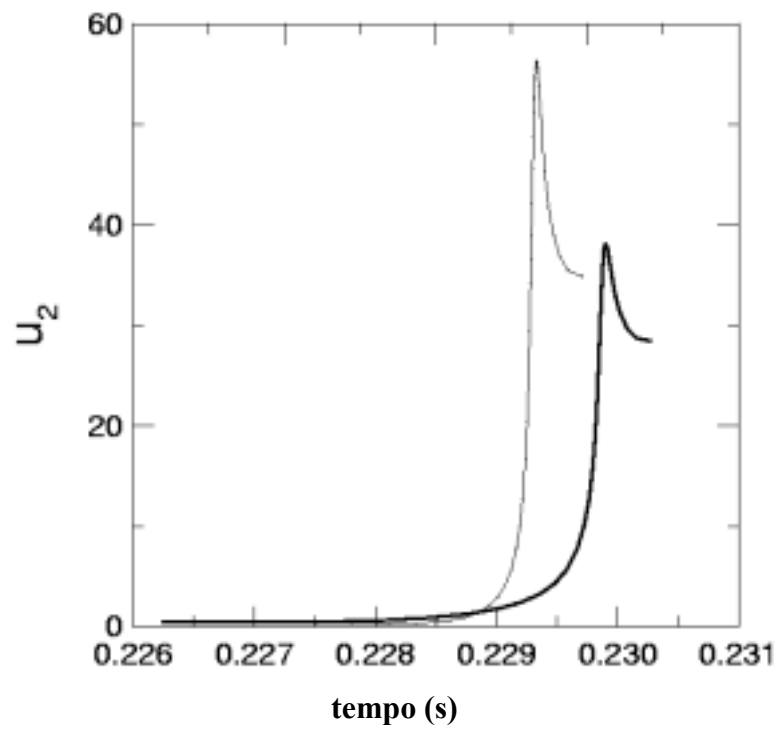


Figura 7 Velocidade de matéria em relação à superfície do caroço interno no cenário do bounce, mostrando um fluxo extremamente supersônico para a camada externa ($u_2 > 1$).

A existência de uma fase mista dentro do caroço interno no momento do *bounce* depende fortemente do confinamento ou não dos neutrinos e dos parâmetros usados na descrição de cada uma das fases. Na figura 2, como vimos, os quadrados representam a densidade máxima alcançada pelo caroço interno durante o primeiro *bounce* no caso de confinamento de neutrinos e os triângulos têm a mesma representação para o caso sem neutrinos. Estes pontos foram obtidos usando-se os cálculos dinâmicos discutidos no capítulo 3. Note que para o caso com neutrinos confinados, o *bounce* do caroço interno sempre ocorre em densidades menores do que a densidade mínima necessária para a transição de matéria pura de hádrons para a fase mista. Apenas no caso não realístico sem neutrinos, a densidade da matéria do caroço interno pode alcançar valores dentro dos limites da fase mista, para valores baixos da constante de sacola B .

5.2 Conclusões

Analizamos neste trabalho a ocorrência de transição de fase quark-hádron durante o colapso gravitacional de uma caroço de pré-supernova, usando um cálculo adiabático simplificado da dinâmica do caroço de supernova. O colapso gravitacional foi descrito a partir de uma lagrangiana efetiva do sistema, com o caroço sendo dividido em duas camadas homogêneas, com massas também dependentes do tempo.

Investigamos também o papel do confinamento de neutrinos sobre a transição de fase da matéria estelar hadrônica para o plasma de quarks e glúons num cálculo estático. A fase de hádrons foi descrita por uma teoria de campos covariante efetiva, optando-se pelo modelo de Zimanyi-Moszkowsky apresentado no capítulo 4, enquanto que a fase de quarks foi descrita usando-se o modelo de sacola com efeitos de interação do meio. O regime de transição entre as duas fases foi construído obedecendo-se às condições de Gibbs juntamente com os vínculos de conservação das cargas bariônica, elétrica e leptônica, esta última para o caso de confinamento de neutrinos. Estes modelos nos permitiram construir duas equações de estado para o regime de densidade supranuclear, uma incluindo o confinamento de neutrinos e a outra não, as quais foram usadas nos cálculos dinâmicos de colapso gravitacional.

Os cálculos dinâmicos de colapso gravitacional mostraram que a explosão de supernova pode ser vista como um evento de duas camadas. Após o colapso gravitacional do caroço, uma parte do sistema é ejetada com velocidade característica de uma explosão de supernova, enquanto que na região central do sistema subsiste um caroço remanescente oscilante, gravitacionalmente ligado, com raio médio, massa e densidade características de uma estrela de nêutrons.

Mostramos que, de acordo com esses modelos, o confinamento de neutrinos inibe fortemente a formação de um caroço híbrido remanescente nos instantes finais do colapso gravitacional, pois as densidades limiares para a transição de fase não são em geral atingidos durante o colapso gravitacional. Entretanto, frisamos que após o processo de resfriamento da proto-estrela de nêutrons, quando então, os neutrinos já terão abandonado o sistema e a equação de estado tiver se tornado mais mole, passará a existir a possibilidade desta estrela se tornar híbrida.

5.3 Perspectivas

Acreditamos que esse modelo simplificado tem o principal mérito de incluir a física essencial do processo da explosão de supernovas e relacionar o mesmo com a formação de uma estrela de nêutrons, o que, até onde pudemos investigar, nunca foi feito. Por outro lado, algumas das simplificações feitas são drásticas, como por exemplo, a simulação do caroço em

apenas duas camadas, quando sabemos que essa separação é suave. Uma perspectiva para o futuro é a inclusão de mais camadas e a investigação do limite hidrodinâmico. Um outro ponto importante, sobre o qual, infelizmente, temos menos controle são as equações de estado utilizadas tanto para os hádrons como para os quarks. Elas são deduzidas de modelos efetivos e ainda assim, consideradas apenas na aproximação de campo médio. A obtenção de uma equação de estado a partir de primeiros princípios (em sonhos, a QCD!!!), é um objetivo difícil, porém altamente desejável. O que pode ser feito em curto prazo, é considerar modelos efetivos que, pelo menos, retenham algumas das simetrias da teoria fundamental como, por exemplo, a simetria quirial, que sabidamente, tem um papel crucial na descrição dos hádrons leves. Uma possibilidade seria o modelo de Nambu-Jona Lasinio e suas extensões. Apesar disto, acreditamos que as características globais do processo não devem depender muito destas questões.

APÊNDICE A

O Equilíbrio Hidrostático

A energia total da estrela, na ausência de movimento macroscópico, é dada por:

$$E = \int_0^M E_1(S, \rho) dm - \int_0^M \left(\frac{Gm}{r} \right) dm$$

onde $m = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$ é a massa dentro da esfera de raio r e ρ é a densidade. O 1º termo se refere à energia interna e o 2º à gravitacional. Usando a identidade termodinâmica para a pressão P :

$$P = - \left[\frac{\partial E_1}{\partial \frac{1}{\rho}} \right]_S,$$

onde S é a entropia, podemos então calcular a 1ª variação da energia total:

$$\delta E = + \int_0^M \left(\frac{P}{\rho^2} \right) \delta \rho dm + G \int_0^M \left(\frac{m}{r^2} \right) dm \delta r \quad (\text{A.1})$$

Transformamos a 1ª integral em:

$$\int_0^M \left(\frac{P}{\rho^2} \right) \delta \rho dm = - \int_0^M P \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) dm = - \int_0^M P \delta \left(4\pi r^2 \frac{dr}{dm} \right) dm$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^M 8\pi P \frac{dr}{dm} r \delta r dm - \int_0^M 4\pi r^2 P \delta \left(\frac{dr}{dm} \right) dm \\
&= -\int_0^M 8\pi P \frac{dr}{dm} r \delta r dm + \int_0^M 4\pi \frac{d}{dm} (Pr^2) \delta r dm \\
&= -\int_0^M 8\pi P \left(\frac{dr}{dm} \right) r \delta r dm + \int_0^M 4\pi r^2 \left(\frac{dP}{dm} \right) \delta r dm + \int_0^M 8\pi Pr \left(\frac{dr}{dm} \right) \delta r dm \\
&= \int_0^M 4\pi r^2 \left(\frac{dP}{dm} \right) \delta r dm \\
&= \int_0^M 4\pi r^2 \left(\frac{dP}{4\pi r^2 \rho dr} \right) \delta r dm \\
&= \int_0^M \left(\frac{dP}{\rho dr} \right) \delta r dm
\end{aligned}$$

Substituindo em (A.1) e fazendo $\delta E = 0$, temos:

$$\int_0^M \left(\frac{dP}{\rho dr} \right) \delta r dm + G \int_0^M \frac{m}{r^2} \delta r dm = 0$$

ou seja:

$$\frac{dP}{dr} + \frac{Gm\rho}{r^2} = 0$$

ou ainda:

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{Gm\rho}{r^2}, \tag{A.2}$$

que é a equação de equilíbrio hidrostático.

APÊNDICE B

O Limite de Chandrasekhar

Consideremos uma estrela composta de matéria fria ($T=0$). Suponhamos que a equação de estado do gás de elétrons livres possa ser representada pela equação de estado de um gás politrópico, onde a pressão é dada pela relação

$$P = K\rho^\Gamma \quad (\text{B.1})$$

onde ρ é a densidade de massa do meio, K é uma constante e Γ é o índice adiabático definido por

$$\Gamma = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \quad (\text{B.2})$$

Se $\rho \ll 10^6 \text{ g/cm}^3$, o gás de elétrons está no domínio não-relativístico, e o índice adiabático é $5/3$. Neste caso, a pressão é dada por

$$P = 1.0036 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \text{ erg / cm}^3 \quad (\text{B.3})$$

onde μ_e é o peso molecular médio por elétron definido como

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i} \right)^{-1} \quad (\text{B.4})$$

Z_i , A_i , X_i são respectivamente o número atômico, o número de massa e a fração em massa do elemento i .

Se $\rho \gg 10^6 \text{ g/cm}^3$, os elétrons estão no regime ultra relativístico de energia, Γ assume o valor $4/3$, e a equação de estado é dada por

$$P = 1.2435 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \text{ erg / cm}^3 \quad (\text{B.5})$$

A equação de equilíbrio hidrostático (1.1) pode ser escrita na forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (\text{B.6})$$

Introduzindo-se as variáveis θ e ξ , definidas de modo a que tenhamos

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (\text{B.7})$$

$$r = a\xi \quad (\text{B.8})$$

onde

$$a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G\rho} \right]^{1/2} \quad (\text{B.9})$$

ρ_c é a densidade central e n é o índice politrópico dado pela relação

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (\text{B.10})$$

Podemos expressar a Eq. B.6 na forma adimensional conhecida como equação de Lane-Emdem para um politropo de índice n

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0 \quad (\text{B.11})$$

Este formalismo permite determinar o raio, a massa máxima e o perfil de densidade de uma esfera composta de um gás politrópico em equilíbrio, podendo ser aplicado em uma análise aproximada da estrutura de anãs brancas da seguinte maneira:

Aplicando as seguintes condições de contorno para o centro da esfera

$$\theta(r=0) = 1 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}(r=0) = 0 \quad (\text{B.13})$$

A condição B.12 vem diretamente de B.7 e a equação B.13 vem do fato de $m(r) \approx 4\pi\rho_c r^3/3$ próximo do centro de modo que pela Eq. 1.1 (Equilíbrio Hidrostático), $dP(\rho)/dr = 0 = d\rho/dr$ no centro. E para $r = R$, sendo R o raio da esfera politrópica

$$P(r=R) = \rho(r=R) = 0, \quad \xi = \xi_1, \quad \theta(\xi_1) = 0$$

podemos integrar numericamente a equação de Lane-Emdem, começando em $\xi=0$ com as condições de contorno B.12 e B.13. Se $n < 5$, i.e., $\Gamma > 6/5$, as soluções decrescem

monotonicamente até o zero em $\xi = \xi_1$: $\theta(\xi_1) = 0$. Este ponto corresponde a superfície da estrela onde $P = \rho = 0$. Obtemos assim a seguinte expressão para o raio da esfera:

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \xi_1 \quad (\text{B.14})$$

e

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$$

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi$$

Eliminando θ^n na equação acima através de B.7 e usando B.11:

$$M = -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi$$

$$M = 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

Usando-se a Eq B.9 para eliminar a na equação anterior, obtemos

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \quad (\text{B.15})$$

Eliminando-se ρ_c através das Eqs. B.14 e B.15, chegamos à seguinte relação entre a massa e o raio de uma esfera politrópica

$$M = 4\pi R^{\frac{3-n}{1-n}} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{3-n}{1-n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \quad (\text{B.16})$$

Soluções para dois casos particulares nos interessam, especificadas pelos seguintes parâmetros:

Gás de elétrons não relativísticos presente em uma anã branca com baixa densidade central:

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \quad n = \frac{3}{2}, \quad \xi_1 = 3.65375, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.71406 \quad (\text{B.17})$$

b) Gás de elétrons extremamente relativísticos presente em anãs brancas com alta densidade central:

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \quad n = 3, \xi_1 = 6.89685, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824 \quad (\text{B.18})$$

No primeiro caso, o raio e a massa total para as configurações de equilíbrio são dados pelas expressões

$$R = 1.122 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g/cm}^3} \right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/6} \text{ km} \quad (\text{B.19})$$

e

$$M = 0.7011 \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5} M \quad (\text{B.20})$$

No segundo caso obtemos

$$R = 3.347 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g/cm}^3} \right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2/3} \text{ km} \quad (\text{B.21})$$

e

$$M = M_{Ch} = 1.457 \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} M_\odot \quad (\text{B.22})$$

Em resumo, quando supomos o limite extremamente relativístico para o gás de elétrons, obtemos uma expressão para a massa que é independente de R e ρ_c . O valor encontrado é justamente o limite de Chandrasekhar que fornece o valor máximo possível para a massa de uma Anã Branca. O valor desse limite depende do número relativo dos elétrons e dos nucleons. Quanto maior a proporção dos elétrons, maior a pressão eletrônica, e maior é a massa limite. Observe também que a dependência do limite de Chandrasekhar com a composição química da estrela está inteiramente embutida no peso molecular médio por elétron, μ_e . Assim, para uma estrela composta de núcleos relativamente leves, para os quais $\mu_e \sim 2$, temos que

$$M_{Ch} \approx 1.46 M_\odot$$

Para um caroço totalmente sintetizado a ^{56}Fe , como se presume existir nos instantes que precedem o colapso gravitacional de uma gigante vermelha, $M_{Ch} \approx 1.24 M_\odot$.

O Modelo de Sacola do M.I.T.

Introdução

Apresentaremos brevemente o modelo de sacola do M.I.T, que foi usado no nosso trabalho de mestrado. Nesse trabalho de doutorado, usaremos uma variação desse modelo para o cálculo da equação de estado.

Espera-se que a transição para matéria de quarks ocorra quando a matéria nuclear for comprimida tanto, que seus constituintes hadrônicos se sobrepõem uns aos outros. Nestas circunstâncias, quarks em diferentes hádrons podem se intercambiar livremente e os graus de liberdade da matéria ficam sendo os dos quarks. A matéria fica então melhor descrita por quarks que constituem os hádrons, do que por hádrons. Devemos enfatizar que a densidade de matéria nuclear (1×10^{14}) é só um pouco menor que a da matéria hadrônica (2.8×10^{14}). Hádrons no núcleo estão quase se sobrepondo e basta uma pequena compressão para que a transição ocorra.

O Modelo de Sacola

A teoria de quarks e glúons, a cromodinâmica quântica, ou QCD, contém dois aspectos fundamentais: liberdade assintótica e confinamento. Esses dois aspectos são incorporados ao modelo de sacola da seguinte maneira:

- dentro da sacola as interações não são consideradas (ou são tratadas com teoria de perturbação de ordem mais baixa)

-fora da sacola quarks são proibidos de existir como partículas livres. Isto é alcançado, dando-se ao vácuo uma densidade de energia constante B que mantém quarks e glúons confinados em pequenas regiões do espaço.

Está-se considerando os hádrons como sacolas com quarks e glúons dentro. A energia de um hádron é então composta de duas partes: a energia associada ao volume da sacola devida à densidade de energia finita do vácuo e a energia devida à energia cinética dos quarks dentro da sacola.

O modelo de sacola tem sido usado para descrever a matéria de quarks e glúons não apenas dentro dos hádrons, como também em qualquer volume fechado finito. É por isso que usamos este modelo nas estrelas de nêutrons. A diferença de energia entre o estado fundamental do vácuo físico até o vácuo QCD dentro da sacola é alcançado adicionando-se o termo.

No modelo de sacola, as equações de estado para o plasma de quarks e glúons são dadas por [12]:

$$P = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4B)$$

$$\varepsilon_p = \frac{N_c N_f}{\pi^2} \left(\frac{7}{60} \pi^4 T^4 + \frac{1}{2} \pi^2 T^2 \mu_q^2 + \frac{\mu_q^4}{4} \right) + \frac{4}{15} N_g \pi^2 T^4 + B$$

onde N_f é o número de sabores de quarks leves, N_c o número de cores e N_g o número de glúons no plasma. T é a temperatura.

Notações e Convenções

Os quadrivetores contravariantes que aparecem no texto são definidos como:

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}),$$

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}),$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

E os quadrivetores covariantes por:

$$x_\mu = (t, -\mathbf{x})$$

$$p_\mu = (E, -\mathbf{p})$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right).$$

Com essa norma, o tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se a e b são dois quadrivetores, então o produto escalar entre eles fica escrito:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

e, de forma análoga

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Os índices gregos assumem valores de 0 a 3 enquanto que os índices latinos assumem valores de 1 a 3.

As matrizes de Dirac obedecem às seguintes regras de comutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

Observe ainda que

$$(\gamma^0)^2 = 1$$

$$(\gamma^0 \gamma^i)^2 = 1$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$$

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\hat{\gamma})$$

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

Os espinores de Dirac satisfazem as relações:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)u(k, \lambda) = 0$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + m)v(k, \lambda) = 0$$

$$\bar{u}(k, \lambda)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) = 0$$

$$\bar{v}(k, \lambda)(i\gamma_\mu \partial^\mu + m) = 0$$

e

$$u^\dagger(k, \lambda)u(k, \lambda') = v^\dagger(k, \lambda)v(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\bar{u}(k, \lambda)u(k, \lambda') = \bar{v}(k, \lambda)v(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{m}{(k^2 + m^2)^{1/2}}$$

Introdução

- [1] Baade W. and Zwicky F., Proc. Nat. Acad. Sci.,20 (1934), 255.
- [2] Ivanenko D. e Kurdgelaidze D.F., Lett. Nuovo Cim. 2 (1969), 13.
- [3] Fuller G.M., Astrophys.J., 252 (1982), 741.
- [4] Bruenn S.W., Astrophys.J., 58 (1985), 771.
- [5] Prakash M., Cooke J.R. and Lattimer J.M., Phys. Rev. D, 52 (1995), 661.
- [6] Bethe H.A., Rev. Mod. Phys., 62 (1990), 801.
- [7] Brown G.A., Phys. Rep., 163, 1998.
- [8] Cooperstein J. e Baron E., in *Supernovae* [3], 213.
- [9] Arnett, W. D., Astrophys. J. Lett., 263 (1983), L55.
- [10] Cooperstein J., Bethe H.A., e Brown G.A., Nucl. Phys., A429 (1984), 527.
- [11] van Riper K., Astrophys. J., 232 (1979), 846.
- [12] van Riper K., Astrophys. J., 257 (1982), 793.
- [13] Bethe H.A., e Pizzochero P.M., Astrophys. J. Lett., 350 (1990), 133.
- [14] Mazurek, T.J. Astrophys. J. Lett., 259 (1982), L13.
- [15] Bethe H.A., e Wilson J.R., Astrophys. J., 295 (1985), 142.
- [16] Wilson J.R., in *Numerical Astrophysics*, edited by Centrella, J. M. LeBlanc e R.L.Bowers (Jones and Bartlett, Boston), (1985), 422.
- [17] Wilson J.R. e Mayle R.W., Phys. Rep. 227 (1993), 97.
- [18] Bruenn S.W., Mezzacappa A., e Dineva T., Phys. Rep. 256 (1995), 69.
- [19] Rodrigues H., Duarte S.B., Kodama T. e d'Ávila V., Astrophys. Spa. Sci., 194 (1992), 313.
- [20] Schertler K., Greiner C., Thoma M. H., Nucl. Phys. A, 616 (1997) 654
- [21] Glendenning N.K., Phys. Rev. D. 46 (1992), 1274.
- [22] Epsztein Grynberg S. et al., aceito para publicação, Phys. Rev.D.

Capítulo 1

- [1] Stars - Their Birth, Life and Death, Iosif S. Shklovskii - W.H. Freeman and Company, San Francisco.
- [2] Burbidge E.M., Burbidge G.R., Fowler W.A. e Hoyle F., Ver. Mod. Phys., bf 29 (1957), 547.
- [3] Weizsäker C.F., Phys. Z., 39 (1938), 633.
- [4] Bethe H., Phys. Rev., 55 (1939), 434.
- [5] Nomoto K. e Hashimoto M., Prog. Nucl. Phys., 17 (1986), 267.

- [6] Chandrasekhar S., "An Introduction to the Study of Stellar Structure", Dover Publications (1957)
- [7] Baym G., Bethe H. e Pethick C., Nuclear Phys. A, 175 (1971), 225
- [8] Bethe H.A. e Brown G. "How a Supernova explodes", Scientific American, 1992.
- [9] Colgate S.A. e White R.H., Astrophys. J., 143 (1966), 626.
- [10] Freedman D.Z., Phys. Ver., D9 (1974), 1389
- [11] Sato K., Progr. Theor. Phys.,53 (1975), 595 e Sato, K., Progr. Theor. Phys.,54 (1975), 1325.
- [12] Mazurek T.J., Astrophys. J., 221 (1976), L87.
- [13] Epstein R.I., e Pethick C.J., Astrophys. J., 243 (1981), 1003.
- [14] Tubbs D.L. e Schramm D.N., Astrophys. J., 201 (1975), 457.
- [15] Colgate S. e Johnson M.J., Phys. Review. Letters, 5 (1960), 235.
- [16] Bruenn S.W., Ann. N.Y. Acad. Sci., 262 (1975), 80.
- [17] Bethe H.A., Brown G.E., Applegate J. e Lattimer J.M., Nucl. Phys. A 324 (1979), 487.
- [18] Woosley S.E. e Weaver T.A., Ann. Astron. Astrophys., 24 (1986), 205.
- [19] Trimble V., Ver. Mod. Phys., 54 (1982), 1183.
- [20] Oppenheimer J.R. e Volkov G.M., Phys. Rev. 55, (1939), 374.
- [21] Gold T., Nature, 218, (1968), 731.
- [22] Hewish A., Bell S.J., Pilkington J.D.H., Scott P.F. e Collings R.A., Nature, 217, (1967), 709.
- [23] Glendenning N.K., Astrophys. Journal, 293 (1985), 470.
- [24] Epsztein Grynberg S., Oliveira F.A., Blin A.H., Hiller B. e Nemes M.C., Helv. Phys. Acta,68 (1995), 429.

Capítulo 2

- [1] Walecka J. D., Ann. Phys. (N.Y.) 83 (1974), 491.
- [2] Zimanyi J. e Moszkowsky S. A., Phys. Rev. C 42, (1990), 1416.
- [3] Serot B.D. e Walecka J.D., "Advances in Nuclear Physics", Plenum, New York (1986), Vol.16
- [4] Weinberg S., "Gravitation and Cosmology", John Wiley & Sons (1972).
- [5] Serot B.D., Phys.Lett., 86B (1979), 146.
- [6] Matsui T., Nucl. Phys., A370 (1981), 365

Capítulo.3

- [1] Rodrigues H., "Descrição Lagrangiana Efetiva do Colapso Gravitacional e Confinamento de Neutrinos em Explosão de Supernovas", Tese de Doutorado, CBPF, RJ, (1995)
- [2] Richtmyer R.D., "Different Methods for Initial-Value Problem", Interscience Publishers, Inc., New York (1957).
- [3] VonNeumann J. e Richtmyer R.D., J. Ap. Phys., 21 (1950), 232.
- [4] Rodrigues H., Duarte S.B., Kodama T. e d'Ávila V., Astrophys. Spa. Sci., 194 (1992), 313.

- [5] Burden L.R., Faires, J.D. e Reynolds, A.C., “Numerical Analysis”, Prindle, Weber & Schmidt editors, Boston – Massachusetts (1984).
- [6] Baym G., Pethick C. e Sutherland P., *Astrophys. J.*, 170 (1971), 299.
- [7] Baym G., Bethe H. e Pethick C., *Nuclear Phys. A*, 175 (1971), 225
- [8] Gudmundsson E. H. e Buchler J.R., *Astrophys. J.*, 238 (1980), 717
- [9] Zeldovich Y.B. e Raizer P.Y., Academic Press, New York, (1966).

Capítulo.4

- [1] Schertler K., Greiner C., Thoma M. H., *Nucl. Phys. A*, 616 (1997) 654
- [2] Glendenning N.K., *Phys. Rev. D*. 46 (1992), 1274.
- [3] Zimanyi J. e Moszkowsky S. A., *Phys. Rev. C* 42, (1990), 1416.
- [4] Li G. Q., Lee C. H. e Brown G., *Nucl. Phys. A*, 625, (1997), 372.
- [5] Walecka J. D., *Ann. Phys. (N.Y.)* 83 (1974), 491.
- [6] Serot B.D. e Walecka J.D., “Advances in Nuclear Physics”, Plenum, New York (1986), Vol.16
- [7] Glendenning N. K., *Astrophys. J.* 293, 470 (1985)
- [8] Epsztein Grynberg, S., “Fenomenologia Estelar em Modelos de Quarks”, Dissertação de Mestrado, UFMG, 1995.
- [9] Cleymans J., *Phys. Rep.*, 130 (1986), 217.
- [10] Chiapparini M., Rodrigues H., e Duarte S. B., *Phys. Rev. C*, 54 (1996), 936.

Capítulo.5

- [1] Baym G., Pethick C. e Sutherland P., *Astrophys. J.*, 170 (1971), 299.
- [2] Baym G., Bethe H. e Pethick C., *Nuclear Phys. A*, 175 (1971), 225
- [3] Gudmundsson E. H. e Buchler J.R., *Astrophys. J.*, 238 (1980), 717