

Dissertação de Mestrado:

**Métodos Estatísticos para Testes Acelerados
com Esforço Aplicado em Escada em um Estudo
de Fadiga Mecânica**

por

João Mário Andrade Pinto

Orientador:

Enrico Antônio Colosimo

Abril de 2000



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**“Métodos Estatísticos para Testes Acelerados com Esforço
Aplicado em Escada em um Estudo de Fadiga Mecânica”**

por

João Mário Andrade Pinto

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Aprovada em 03 de abril de 2000.

Banca Examinadora:

Prof. Enrico Antônio Colosimo
Orientador

Prof. Ernani Sales Palma
PUC/MG

Profa. Marta Afonso Freitas
Departamento de Estatística – UFMG

Aos meus pais

Antônio e Maria Aparecida

À Vânia, Felipe e Flávio

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar ao Professor Enrico Antônio Colosimo pela orientação, participação ativa e também pela sua amizade, me incentivando ao longo deste trabalho e transmitindo seu otimismo e gosto pela estatística.

Depois, a Marcelo Antônio Veloso, pela inestimável e competente ajuda na implementação computacional.

Ao grande amigo Maurício Mendes Campos pela competência e brilhantismo na revisão deste texto. O Maurício leu nas linhas e nas entrelinhas. Aliás, como é do seu feitio.

Ao Professor Ernane Sales Palma e Tânius Rodrigues Mansur pela colaboração em ceder os dados experimentais, e que possibilitou a aplicação em um caso real, e pelos esclarecimentos sobre o comportamento de materiais submetidos a ensaios de fadiga.

Ao amigo Allbens Atman Picardi Faria pela competência e boa vontade em auxiliar-me em um momento crucial deste trabalho.

Ao amigo Geraldo de Paula Martins, colocando-se sempre, e a qualquer hora, a disposição para ajudar-me na solução de problemas de matemática.

A Lenira L. S. P. Ferreira pela cooperação que me foi prestada.

A todos os colegas e amigos do CDTN pelo apoio e incentivo.

Ao Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CDTN/CNEN) que me possibilitou realizar este trabalho.

Ao Felipe e ao Flávio, meus filhos e amigos, tantas vezes sem a minha companhia, pela minha absorção no trabalho.

Por último, mas ainda mais, a Vânia. Todos nós conhecemos pessoas que, se não fosse a convivência com parceiros ou parceiras intransigentes, limitados e limitantes, fariam muito mais, e melhor. Eu tenho a felicidade de ter uma esposa e companheira com características diametralmente opostas, sempre a incentivar-me e a apoiar-me nos momentos de desânimo, estimulando-me a prosseguir para alcançar os objetivos almejados. Uma fonte de inspiração e um amparo indispensável.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 TESTES ACELERADOS	1
1.1 Introdução	1
1.2 Fadiga Mecânica	2
1.3 Conceitos Básicos em Confiabilidade	4
1.3.1 Falha	4
1.3.2 Censura	4
1.3.3 Função de Confiabilidade	4
1.4 Tipos de Testes Acelerados	6
1.5 Descrição do Trabalho	9
CAPÍTULO 2 TESTES ACELERADOS COM TENSÃO CONSTANTE	10
2.1 Relações Tensão-Resposta	10
2.1.1 Relação de Arrhenius	10
2.1.2 Relação de Potência Inversa	10
2.2 Modelos Probabilísticos para o Tempo de Falha	11
2.2.1 Modelo Probabilístico de Weibull	11
2.2.2 Modelo Log-normal	11
2.3 Estimação dos Parâmetros do Modelo Estatístico	12
2.3.1 Método de Máxima Verossimilhança	12
2.3.2 Intervalos de Confiança	13
CAPÍTULO 3 TESTES ACELERADOS COM TENSÃO APLICADA EM ESCADA	15
3.1 Modelo Probabilístico para o Tempo de Falha	15
3.1.1 Efeito de Dano Acumulado	15
3.1.2 Função de Verossimilhança	21
3.2 Teoria de Acúmulo de Danos – Modelo de Palmgren e Miner	21
3.3 Comparação do Modelo de Palmgren e Miner com o Modelo de Nelson	23
CAPÍTULO 4 APLICAÇÃO DO MODELO ESTATÍSTICO PARA UM TESTE ACELERADO COM TENSÃO EM ESCADA	26
4.1 Dados Experimentais	26
4.2 Estimativas e Intervalos de Confiança	29

4.3	Construção dos Intervalos de Confiança para os Percentis Usando o Modelo Ajustado e as Estimativas de Máxima Verossimilhança	29
4.4	Considerações Computacionais	33
	CAPÍTULO 5 CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41

LISTA DE SÍMBOLOS

A e ω – parâmetros da relação de potência inversa, cujos valores dependem do item, da fabricação, das condições de teste, etc.

C – parâmetro da relação de Arrhenius, cujo valor depende do mecanismo de falha do item, das condições de teste.

D_i – dano parcial sob o nível de estresse (ou tensão) S_i .

E – energia de ativação, normalmente dado em elétron-volts, da relação de Arrhenius.

$F(.)$ – função de distribuição.

I_θ – matriz de informação observada.

K – constante de Boltzmann ($8,617385 \times 10^{-5}$ eV/K, valor extraído de LIDE, 1996).

l – índice para o corpo de prova; $0 \leq l \leq n$.

n – número de corpos de prova.

N – número de níveis de estresse (ou tensão) até a ocorrência de falha.

S – estresse, no caso geral, e tensão no caso particular de engenharia mecânica.

S_i – nível i de estresse (ou tensão).

T – variável aleatória que representa o tempo até a ocorrência da falha de um item.

t – tempo em que o item é submetido a uma condição de estresse (ou tensão).

t_p – percentil (100p)%.

Z – é a variável da distribuição normal reduzida.

α – parâmetro de escala da distribuição de Weibull.

δ – função indicadora.

γ – parâmetro de forma da distribuição de Weibull.

$\Phi(.)$ – função de distribuição da normal reduzida.

μ – média, parâmetro da distribuição log-normal.

θ – vetor genérico de parâmetros.

σ – desvio-padrão, parâmetro da distribuição log-normal.

τ_i – tempo de início equivalente de teste de um corpo de prova submetido a um determinado estresse (ou tensão).

ξ_i – tempo até a falha de um item submetido a um estresse (ou tensão) S_i .

ζ_θ – matriz de informação de Fisher.

RESUMO

O estudo de propriedades de fadiga em materiais requer a análise de dados experimentais. Devido à aleatoriedade inerente aos dados de fadiga, a modelagem estocástica do processo de fadiga é natural e necessária. Por outro lado, em vista do processo de fadiga envolver o acúmulo de danos parciais, a aplicação da tensão precisa ser feita em forma de escada, para que o modelo leve em consideração tal fenômeno. Desse modo, é apresentado, neste trabalho, o método de máxima verossimilhança para se obter o modelo estatístico para o tempo de vida em função do nível de tensão aplicado com a forma acima mencionada, que pode ser censurado, baseado nos artigos de NELSON (1980) e TANG et al. (1996).

É feita uma aplicação do modelo estatístico para um teste acelerado, com tensão aplicada em forma de escada, em um conjunto de dados experimentais. Para esses dados, são estimados os parâmetros do modelo e seus respectivos intervalos de confiança.

A implementação dessa aplicação poderia ter sido feita utilizando-se o método convencional de Newton-Raphson. No entanto, face a natureza das equações, pequenos afastamentos em relação aos valores das raízes provocam grandes oscilações computacionais, inviabilizando a utilização deste método. Para contornar estas dificuldades, foram utilizados métodos numéricos alternativos, denominados método de Newton de convergência global e o método de Broyden, tendo obtido, em ambos, resultados equivalentes.

Apresenta-se, também, uma aplicação do modelo ajustado, determinando-se os valores estimados dos percentis e seus respectivos intervalos de confiança, relacionados a diversos níveis de tensão.

CAPÍTULO 1 TESTES ACELERADOS

1.1 Introdução

O sucesso em setores competitivos requer tempos de ciclos cada vez menores para introdução de produtos novos, ou melhorados, no mercado. Ou seja, é necessário que o tempo decorrido entre a concepção e a introdução de produtos no mercado se torne cada vez menor. Assim, para se obter melhorias relevantes no tempo de resposta, é necessário que a estrutura e os processos de trabalho sejam simplificados e que sejam desenvolvidas novas metodologias e/ou tecnologias, a fim de reduzir os tempos dos ciclos dos processos. Tudo isso sem afetar negativamente as características da qualidade exigidas.

É neste contexto que se inserem os testes de vida acelerados. Uma importante característica da qualidade é a confiabilidade. Para se obter informações a respeito da confiabilidade, ou de outro modo, para se fazer previsões da confiabilidade, é necessário a realização de testes de tempo de vida, em que, portanto, a variável de interesse é o tempo até a falha, e a sua análise utilizando modelos estatísticos adequados. Esse tempo costuma ser muito grande, tornando-se impraticável a realização de tais testes. Assim, há que se desenvolver metodologias para a redução desse tempo até a falha.

O teste de vida acelerado tem por objetivo apressar a ocorrência de falha, através da aplicação de condições estressantes. Essas condições estressantes correspondem à aplicação de um nível de estresse¹ (ex: taxa de uso, temperatura, voltagem, tensão, etc.) bem superior àquele a que o produto é submetido em condições normais de uso. Por exemplo, corpos-de-prova são testados em altos níveis de tensão para induzir falhas mais cedo; então, o tempo até a ocorrência da falha é relacionado ao nível de tensão operacional através de um dado modelo estatístico que é função da tensão.

O estresse pode ser aplicado de várias maneiras, conforme descrito por NELSON (1990), no entanto, neste trabalho, serão utilizadas as duas mais comuns, quais sejam:

- **estresse constante:** cada unidade é submetida a um determinado nível de estresse até o final do teste;
- **estresse em escada (“step-stress”):** cada unidade é submetida a um nível de estresse por um determinado período de tempo. Se a unidade não falhar, o nível de estresse é elevado para um novo patamar, aguardando-se um determinado período de tempo; se a unidade não falhar, repete-se o procedimento até que ocorra a falha. No caso dessa metodologia, há

¹ O termo *estresse*, apesar de ser usado, a rigor, apenas na área médica, por falta de um termo mais apropriado, será usado neste trabalho num sentido abrangente. Quando se tratar de fadiga, este termo será substituído por *tensão* ou *esforço*.

uma drástica redução do tempo de teste em relação à metodologia anterior. No entanto, a modelagem desta metodologia, para fins de estimação dos parâmetros de confiabilidade, é bem mais complexa. Na Seção 1.4 estas formas de aplicação de estresse serão mais bem explicadas e outras formas serão apresentadas.

Um outro caso de necessidade de aplicação de testes acelerados, em particular o de **estresse em escada**, é no estudo da fadiga de materiais de engenharia, que será explicado na Seção 1.2. Nesse estudo, a tensão a que é submetido o material é a tensão alternada, que é definida como a força aplicada alternadamente sobre uma determinada área. Este trabalho vai se concentrar somente neste tipo de aplicação da tensão.

1.2 Fadiga Mecânica

Sabe-se, há muito tempo, que certas peças metálicas, submetidas a esforços variáveis no tempo e repetidos grande número de vezes, rompem-se bruscamente sem que nenhuma deformação macroscópica permanente anuncie sua ruptura, enquanto que as mesmas peças, submetidas a um esforço maior, mas aplicado de maneira contínua, resistem perfeitamente. Assim, o simples fato de os esforços serem variáveis no tempo implica uma ação drasticamente mais perigosa, do ponto de vista de resistência, como mostrado no trabalho de COLLINS (1981).

Diz-se que é por **fadiga** a causa, aparentemente misteriosa, deste desfalecimento, que um item sofre quando submetido à ação de esforços variáveis no tempo.

Fadiga pode ser definida como o fenômeno que ocorre em componentes e estruturas sujeitos a carregamento externo que varia com o tempo, onde a tensão cíclica resultante produz deformação plástica microscópica que, *acumulativa*, resulta na diminuição gradual da resistência do material, ou na sua fratura.

Fadiga em materiais de engenharia é considerado um processo importante de deterioração e o principal modo de falha para vários sistemas mecânicos e estruturais, tais como aviões, pontes, vasos de pressão, guindastes, locomotivas e vagões sobre trilhos, navios, etc. Estima-se que 50 a 90% de todas as falhas mecânicas em estruturas metálicas são atribuídas a fadiga (COLLINS, 1981).

Os carregamentos cíclicos, a que os componentes mecânicos e estruturais estão sujeitos, provocam tensões cíclicas, podendo conduzir a falha por fadiga. O processo de fadiga é bastante complexo, uma vez que a falha pode ocorrer sem nenhum aviso prévio sob tensões inferiores ao limite de escoamento do material². Além disso, o dano provocado pela fadiga é acumulativo e irreversível. Períodos de “descanso”, nos quais os esforços externos são

² Limite de escoamento é o valor da tensão, particular para cada material, que estabelece a fronteira entre a região elástica e a plástica.

retirados, não provocam uma recuperação do componente ou estrutura (COLLINS, 1981 e SOBCZYK e SPENCER, 1992).

A fadiga pode ser caracterizada como um fenômeno de falha progressiva, constituindo-se, basicamente, na nucleação e propagação de trincas até que se atinja um tamanho crítico, a partir do qual a propagação ocorre de maneira instável e incontrolável. Apesar de os aspectos microscópicos serem de grande importância para a compreensão do processo de fadiga, os engenheiros envolvidos com projeto de equipamentos e estruturas se interessam, predominantemente, pelos aspectos macroscópicos da falha por fadiga e os meios necessários para sua prevenção dentro da vida prevista (COLLINS, 1981 e SOBCZYK e SPENCER, 1992).

Para a prevenção de falhas por fadiga, deve-se considerar a resposta do material aos diversos carregamentos passíveis de existir durante a vida prevista do componente. Além disso, as características de fadiga de um material não podem ser deduzidas a partir de outras propriedades mecânicas quase estáticas. Elas devem ser medidas diretamente, através de ensaios mecânicos específicos. Através destes ensaios, obtêm-se as curvas denominadas de S-T, onde a vida do material ou a variável tempo até a falha, T, é expressa em função da tensão alternada, S, aplicada ao material³. A determinação de uma curva S-T é realizada através da aplicação de determinado valor de tensão alternada, a qual é mantida constante até a ruptura do material.(COLLINS, 1981 e SOBCZYK e SPENCER, 1992).

Cabe observar, entretanto, que, na grande maioria de componentes mecânicos ou estruturais que trabalham sujeitos a carregamentos cíclicos, em que fadiga é o modo de falha predominante, o valor da tensão alternada pode variar durante a vida útil. Assim, em vez de uma única tensão alternada σ_a durante n ciclos, uma peça pode estar sujeita à tensão σ_{a1} durante n_1 ciclos, à tensão σ_{a2} durante n_2 ciclos, e assim por diante. Tais variações do valor da tensão alternada tornam o uso direto das curvas S-T inadequado, já que estas curvas são determinadas sob condição de tensão alternada constante ($\sigma_a = \text{cte.}$). Desta forma, é importante o conhecimento do efeito de esforços externos com valor da tensão alternada variável sobre a curva S-T de materiais de uso em engenharia, o que possibilitaria uma modificação da curva S-T original, obtendo-se assim, as informações necessárias para o projetista (COLLINS, 1981 e SOBCZYK e SPENCER, 1992), caracterizando, desta forma, um esforço aplicado em escada.

A partir deste ponto será usado o termo tensão em lugar de tensão alternada.

³ Nos textos referentes ao tema Fadiga, essa curva é denominada de S-N, onde N é o número de ciclos. Neste trabalho denominaremos de S-T por coerência de notação ao longo do texto.

1.3 Conceitos Básicos em Confiabilidade

1.3.1 Falha

Confiabilidade é a probabilidade de um item desempenhar satisfatoriamente a função requerida, sob condições de operação estabelecidas, por um período de tempo predeterminado (FREITAS e COLOSIMO, 1997). Ou seja, é o estudo probabilístico do tempo despendido por um item até a sua falha, durante o exercício de uma determinada função, sob condições de operação estabelecidas.

A falha, enquanto catastrófica, é fácil de entender; um exemplo é o rompimento de um corpo-de-prova durante o ensaio de fadiga. Outros itens falham por deterioração gradativa, tornando necessário uma definição clara da falha, de modo a não gerar dúvidas. Um exemplo é o caso do vaso de um reator nuclear; uma falha ocorre quando surge uma trinca em sua parede.

O período de utilização do item até a falha é denominado de tempo de falha e pode ser medido por qualquer grandeza que seja função do tempo. Por exemplo, tempo de utilização do vaso de um reator nuclear, número de ciclos em um teste de fadiga, quilometragem de um veículo, etc.

1.3.2 Censura

Independente do tipo de aplicação da tensão (tensão constante ou em escada), os testes de vida podem ser interrompidos antes da falha ter ocorrido. Essa interrupção dos testes gera o que é denominada **censura**, ou seja, o item submetido a teste não chega a falhar e o que se observa é um tempo inferior ao de falha. Existem três tipos de censura, conforme descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997):

- a) Censura por número de ciclos ou do tipo I – o teste é interrompido após ocorrido um número de ciclos predeterminado.
- b) Censura por falha ou do tipo II – o teste é interrompido após uma fração especificada do número de itens sob teste ter falhado.
- c) Censura do tipo aleatório – quando um item é retirado no decorrer do teste sem ter atingido a falha.

1.3.3 Função de Confiabilidade

A função de confiabilidade é definida como a probabilidade de um produto operar sem falha, até um certo tempo t , conforme descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997). Em termos probabilísticos, escrevemos

$$R(t) = P(T \geq t),$$

onde T é a variável aleatória *tempo até a ocorrência da falha*.

A Figura 1.1 é um desenho esquemático representando duas funções de confiabilidade para dois itens diferentes que exercem a mesma função. Percebe-se que o item 1 é superior ao item 2 com relação a durabilidade. Note que para um lote contendo o item 1, o tempo para cerca de 50% deles já terem falhado é de 20 anos, enquanto que para os itens 2 este tempo é cerca de 10 anos. A função de distribuição, usualmente apresentada nos livros de probabilidade, é:

$$F(t) = 1 - R(t) = P(T < t).$$

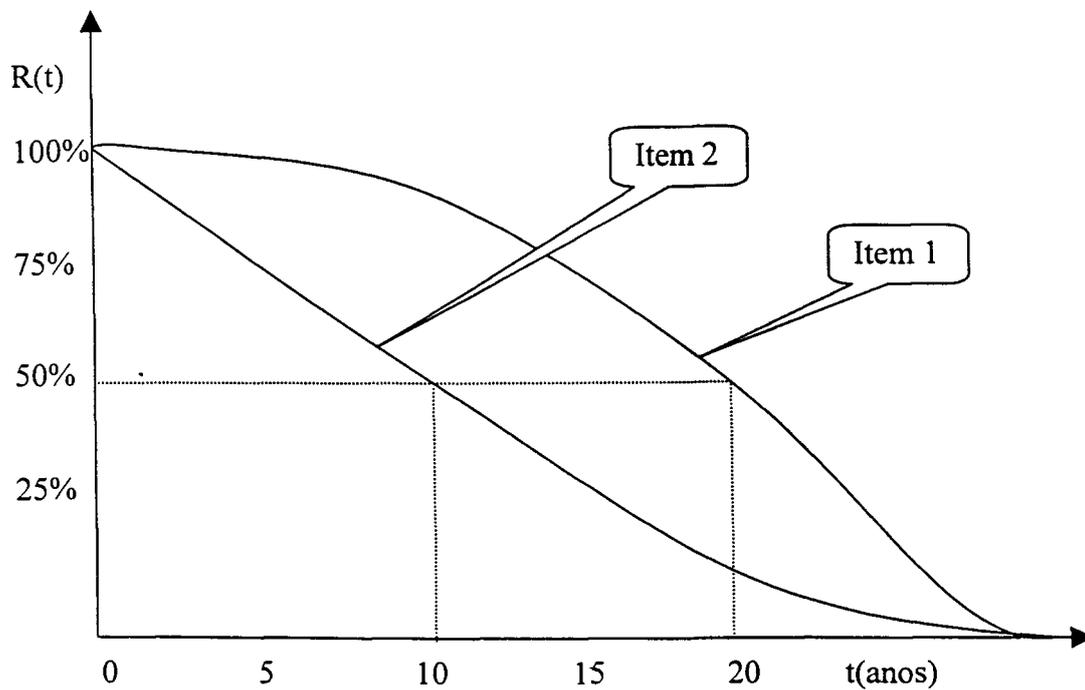


Figura 1.1: Funções de confiabilidade para dois produtos

1.4 Tipos de Testes Acelerados

Conforme mostrado por NELSON (1990), os teste acelerados são classificados em função da maneira de aplicação do nível de tensão:

- **Constante:** é o tipo mais comum. Cada unidade é submetida a um nível de tensão constante, Figura 1.2. Para que se possa modelar esse tipo de teste, é necessário utilizar vários níveis de tensão. No entanto, uma vez fixado o nível de tensão para uma determinada unidade, esta ficará submetida a este nível até o final do teste.

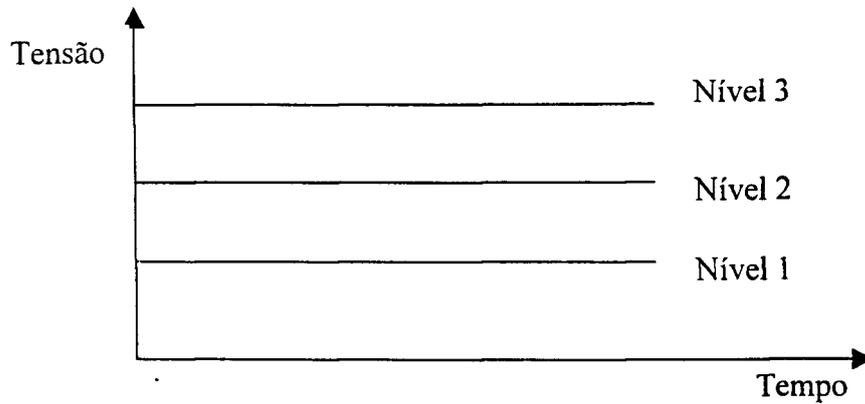


Figura 1.2: Aplicação de nível de tensão constante.

- **Escada ("step stress"):** cada unidade é submetida a um nível de tensão por um certo tempo. Se a unidade não falhar, o nível de tensão é alterado para um novo patamar, e o procedimento se repete. A Figura 1.3 ilustra esse tipo de teste.

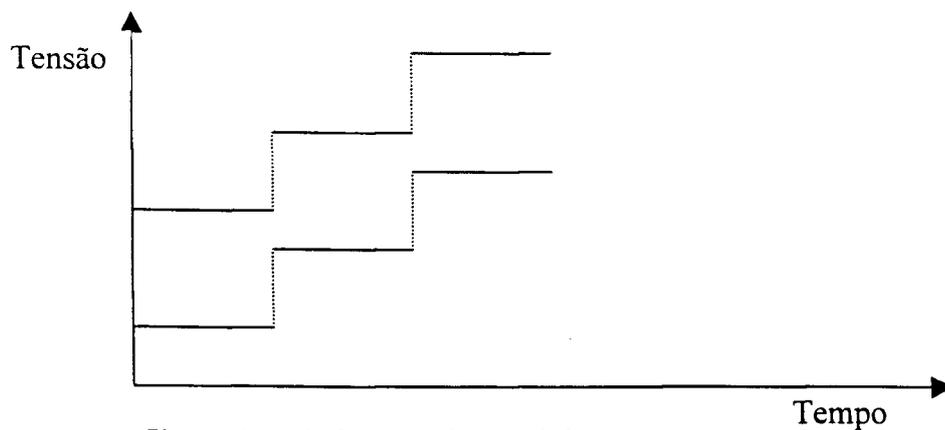


Figura 1.3: Aplicação do nível de tensão em escada

- **Progressivo:** cada unidade é submetida a um nível crescente de tensão, porém esse aumento não é feito em patamares, mas continuamente, conforme mostra a Figura 1.4.

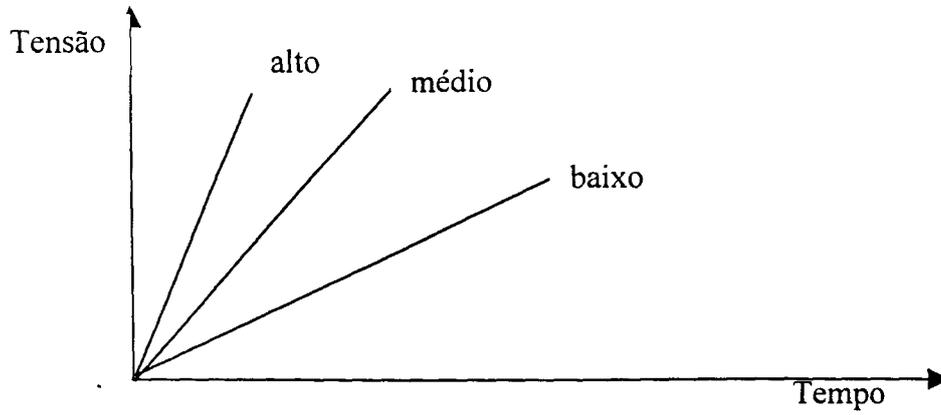


Figura 1.4: Aplicação do nível de tensão progressivo

- **Cíclico:** cada unidade é submetida a tensões variando de maneira cíclica, conforme ilustrado na Figura 1.5.

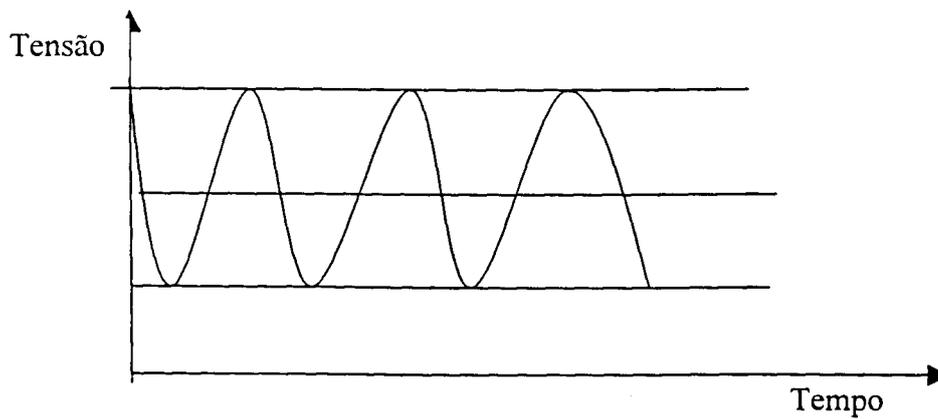


Figura 1.5: Aplicação do nível de tensão cíclico.

Outras formas de aplicação de tensão e uma descrição mais exaustiva das formas apresentadas podem ser encontradas em NELSON (1990).

1.5 Descrição do Trabalho

A forma usualmente utilizada pelos engenheiros para conhecer as propriedades de fadiga é através de ensaios, de vida sob tensão, de materiais usados na confecção de componentes mecânicos e estruturais. Esses ensaios muitas vezes são realizados aplicando-se a tensão na forma de escada. Esse tipo de aplicação de tensão para o estudo das propriedades da fadiga é importante e necessário para se poder estudar e avaliar o fenômeno denominado de acúmulo de danos, que é a soma dos danos provocados na estrutura durante cada carregamento. O estudo do acúmulo de danos é importante porque os carregamentos cíclicos, a que os componentes mecânicos e estruturais estão sujeitos, variam na sua amplitude, provocando, portanto, danos parciais que se acumulam até a ocorrência da falha.

Para a condução desse estudo, foi escolhida a liga Fe-1,88%Ni-1,34%Cu-0,50%Mo, feita de pós pré-ligados; levando-se em consideração o fato de que o conhecimento das propriedades de fadiga tem se tornado muito importante nas aplicações de produtos de metalurgia do pó. Estes materiais estão cada vez mais sendo usados como componentes sujeitos a ciclos de carregamento, e, portanto, têm surgido limitações de desempenho associadas com falhas de fadiga. Por outro lado, as propriedades de fadiga para materiais livres de porosidade são bem conhecidas, o que não ocorre para materiais sinterizados. Como nos últimos tempos tem crescido muito a utilização desse tipo de material, surgiu, então, o interesse em estudar tal material.

Nos testes de vida acelerados, são observados dados de vida sob tensão. Para obter a distribuição de vida sob tensão de operação, necessita-se de um modelo que relacione a distribuição sob o teste de vida acelerado àquela sob tensão de operação. Neste trabalho serão mostrados os modelos mais usados numa configuração de tensão constante e numa configuração de tensão em escada. Serão utilizados dados de experiência em fadiga para mostrar uma aplicação do estudo da confiabilidade com tensão em escada.

Este trabalho foi dividido da seguinte forma. No Capítulo 2 serão apresentados os modelos estatísticos para tensão constante. Apesar de ele não ser o tema deste trabalho, é aconselhável apresentar estes modelos, antes dos de tensão em escada, pela sua simplicidade e apresentação da notação. No Capítulo 3 serão apresentados os métodos estatísticos para tensão em escada, que são baseados nos artigos de NELSON (1980) e TANG et al. (1996). Finalmente, no Capítulo 4, serão aplicados os modelos para tensão em escada aos resultados do ensaio de fadiga mecânica, realizado pelo Prof. Ernani Sales Palma, da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, em corpos-de-prova confeccionados com a liga Fe-1,88%Ni-1,34%Cu-0,50%Mo, feitos de pós pré-ligados, onde o objetivo foi estudar as propriedades de fadiga neste tipo de material (os dados foram passados pelo Prof. Ernani Sales Palma, através de comunicação pessoal).

CAPÍTULO 2 TESTES ACELERADOS COM TENSÃO CONSTANTE

Em confiabilidade são utilizados, basicamente, dois modelos de probabilidade (Weibull e log-normal) para o tempo de falha como função de tensão constante, e dois tipos de relações tensão-resposta (Arrhenius e Potência Inversa) (FREITAS e COLOSIMO, 1997 e SOBCZYK e SPENCER, 1992). O modelo estatístico compreende dois componentes: (1) determinístico, que neste caso é denominado de relação tensão-resposta; (2) estocástico, que é caracterizado pela distribuição de probabilidade da resposta. Na Seção 2.1, serão apresentadas as relações tensão-resposta e, na Seção 2.2, os dois modelos probabilísticos.

2.1 Relações Tensão-Resposta

2.1.1 Relação de Arrhenius

É utilizada para relacionar o tempo T até a falha e a variável de estresse S , onde S é a temperatura absoluta em kelvin. Essa relação é descrita pela seguinte expressão (FREITAS e COLOSIMO, 1997):

$$t = C \exp\left(\frac{E}{kS}\right)$$

onde:

- C – constante que é característica do mecanismo de falha do produto e das condições de teste;
- E – energia de ativação, normalmente em elétron-volts;
- k – constante de Boltzmann ($8,617385 \times 10^{-5}$ eV/K) (LIDE, 1996)

2.1.2 Relação de Potência Inversa

É utilizada para relacionar o tempo de falha t em função de qualquer outro tipo de variável de estresse S . Essa relação tem a seguinte expressão:

$t = \left(\frac{A}{S}\right)^\omega$, onde A e ω são parâmetros característicos do produto, unidade, geometria, fabricação, método de teste, etc.

CAPÍTULO 2 TESTES ACELERADOS COM TENSÃO CONSTANTE

Em confiabilidade são utilizados, basicamente, dois modelos de probabilidade (Weibull e log-normal) para o tempo de falha como função de tensão constante, e dois tipos de relações tensão-resposta (Arrhenius e Potência Inversa) (FREITAS e COLOSIMO, 1997 e SOBCZYK e SPENCER, 1992). O modelo estatístico compreende dois componentes: (1) determinístico, que neste caso é denominado de relação tensão-resposta; (2) estocástico, que é caracterizado pela distribuição de probabilidade da resposta. Na Seção 2.1, serão apresentadas as relações tensão-resposta e, na Seção 2.2, os dois modelos probabilísticos.

2.1 Relações Tensão-Resposta

2.1.1 Relação de Arrhenius

É utilizada para relacionar o tempo T até a falha e a variável de estresse S , onde S é a temperatura absoluta em kelvin. Essa relação é descrita pela seguinte expressão (FREITAS e COLOSIMO, 1997):

$$t = C \exp\left(\frac{E}{kS}\right)$$

onde:

- C – constante que é característica do mecanismo de falha do produto e das condições de teste;
- E – energia de ativação, normalmente em elétron-volts;
- k – constante de Boltzmann ($8,617385 \times 10^{-5}$ eV/K) (LIDE, 1996)

2.1.2 Relação de Potência Inversa

É utilizada para relacionar o tempo de falha t em função de qualquer outro tipo de variável de estresse S . Essa relação tem a seguinte expressão:

$t = \left(\frac{A}{S}\right)^\omega$, onde A e ω são parâmetros característicos do produto, unidade, geometria, fabricação, método de teste, etc.

2.2 Modelos Probabilísticos para o Tempo de Falha

2.2.1 Modelo Probabilístico de Weibull

O modelo de Weibull é caracterizado por dois parâmetros: γ , parâmetro de forma e α , parâmetro de escala, conforme descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997) e COLLET, (1994). O parâmetro de forma γ é suposto constante para todos os níveis de tensão e o parâmetro de escala α é função do nível de tensão S , ou seja $\alpha(S)$.

A função de densidade da distribuição de Weibull é dada por

$$f(t|S) = \gamma [\alpha(S)]^{-\gamma} t^{\gamma-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha(S)}\right)^\gamma\right], \quad t \geq 0.$$

A função de confiabilidade para o tempo de falha T é dada pela seguinte expressão:

$$R(t|S) = \exp\left\{-\left[\frac{t}{\alpha(S)}\right]^\gamma\right\}$$

onde

$$\alpha(S) = \left(\frac{A}{S}\right)^\omega, \text{ no caso de se usar a relação potência inversa e}$$

$$\alpha(S) = A \exp\left(\frac{E}{kS}\right), \text{ no caso de se usar a relação de Arrhenius}$$

Para $\gamma = 1$, a distribuição de Weibull se reduz à distribuição exponencial e suas propriedades são descritas, por FREITAS e COLOSIMO (1997) e por COLLET (1994).

O percentil 100p%, t_p , é dado por

$$t_p = \alpha(S) [-\ln(1-p)]^{1/\gamma}$$

2.2.2 Modelo Log-normal

O modelo log-normal é assim denominado porque o logaritmo natural de uma variável com distribuição log-normal com parâmetros μ e σ , tem uma distribuição normal com média μ e desvio-padrão σ . Esta relação significa que dados provenientes de uma distribuição log-normal podem ser analisados segundo uma distribuição normal, se for trabalhado com o logaritmo natural dos dados em vez de seus valores originais.

O parâmetro σ é suposto constante para todos os níveis de tensão e o parâmetro μ depende da variável de tensão S , ou seja $\mu(S)$.

A função de densidade da distribuição log-normal é dada por

$$f(t|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma}} \exp\left\{-\frac{[\ln(t) - \mu(S)]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad t \geq 0.$$

A função de confiabilidade para o tempo de falha T é dada pela seguinte expressão:

$$R(t|S) = \Phi\left[-\frac{\ln(t) - \mu(S)}{\sigma}\right]$$

onde

$$\mu(S) = \ln\left(\frac{A}{S}\right)^\omega, \text{ no caso de se usar a relação potência inversa e}$$

$$\mu(S) = \ln\left[A \exp\left(\frac{E}{kS}\right)\right], \text{ no caso de se usar a relação de Arrhenius}$$

O percentil 100p%, t_p , é dado por

$$t_p = \exp[z_p \sigma + \mu(S)]$$

2.3 Estimação dos Parâmetros do Modelo Estatístico

Para se individualizar uma distribuição de probabilidade (ou caracterizar uma determinada população), é necessário o conhecimento do valor numérico de seus parâmetros. Em estatística, esses parâmetros devem ser estimados a partir das observações amostrais. Existem vários métodos de estimação, conforme descrito por MOOD, GRAYBILL e BOES (1974) e por GARTHWAITE, JOLLIFFE e JONES (1995). No entanto, para o caso particular de confiabilidade, o método mais adequado é o de máxima verossimilhança, descrito por CORDEIRO (1992), uma vez que este método permite incorporar as informações provenientes das censuras. Esse método, além de ser relativamente simples, tem a vantagem de fornecer estimadores, cujas distribuições convergem para a distribuição normal, à medida que se aumenta o tamanho da amostra, sob certas condições de regularidade (CORDEIRO, 1992).

2.3.1 Método de Máxima Verossimilhança

Visto que, de uma amostra de n observações algumas são censuradas, a função de verossimilhança será composta da função densidade de probabilidade, para aquelas observações não censuradas, e, para as censuradas, pela função de confiabilidade. A razão de

se usar a função de confiabilidade é que alguns itens não falharam, e portanto, tudo o que se sabe é que o tempo de falha é superior ao tempo observado de censura. A função que descreve a probabilidade de a variável tempo de falha T ser superior a um valor qualquer t é a função de confiabilidade, definida na Subseção 1.3.1. Assim, a expressão da função de verossimilhança, mostrada por FREITAS e COLOSIMO (1997), é:

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^n \{f(t_j; \theta)\}^{\delta_j} \cdot [R(t_j; \theta)]^{1-\delta_j}$$

onde θ é o vetor de parâmetros e $\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo item falhar} \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo item não falhar} \end{cases}$

Essa expressão é válida para todos os tipos de censura, com a suposição de que eles sejam não-informativos, ou seja, não carreguem informações sobre os parâmetros (LAWLESS, 1982).

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de θ que maximizam $L(\theta)$ ou, equivalentemente, $\ln[L(\theta)]$.

2.3.2 Intervalos de Confiança

Os intervalos de confiança para os parâmetros são construídos a partir de algumas propriedades que os estimadores de máxima verossimilhança possuem, descritas, entre outros, por CORDEIRO (1992). A principal delas é: sendo atendidas as condições de regularidade usuais, se $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ , então, assintoticamente, $\hat{\theta} \sim N(\theta, \zeta_\theta^{-1})$. Onde,

$$\zeta_\theta = -E \left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \right] \text{ e } l(\theta) = \ln L(\theta),$$

ζ_θ é chamada matriz de informação de Fisher. ζ_θ é usualmente função de θ . Uma estimativa para ζ_θ é obtida substituindo θ por $\hat{\theta}$, que iremos simbolizar por $\hat{\zeta}_\theta$.

No caso em que a esperança é impossível ou muito difícil de ser calculada, utiliza-se:

$$I_\theta = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}$$

que é denominada matriz de informação observada.

No caso especial em que θ é um escalar, o intervalo de $(1 - \alpha)100\%$ de confiança é

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{I}_{\theta}^{-1}}$$

Quando θ não for um escalar, o intervalo de confiança de $(1 - \alpha)100\%$ para o i -ésimo componente de θ (θ_i) é dado por

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{I}_{ii}^{-1}}$$

onde

$$\hat{I}_{\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11}^{-1} & \dots & \hat{I}_{1i}^{-1} & \dots & \hat{I}_{1p}^{-1} \\ \hat{I}_{21}^{-1} & \hat{I}_{22}^{-1} & \dots & \hat{I}_{2i}^{-1} & \dots & \hat{I}_{2p}^{-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \hat{I}_{i1}^{-1} & \dots & \hat{I}_{ii}^{-1} & \dots & \hat{I}_{ip}^{-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \hat{I}_{p1}^{-1} & \dots & \hat{I}_{pi}^{-1} & \dots & \hat{I}_{pp}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, \hat{I}_{θ}^{-1} é uma matriz $p \times p$ simétrica e os elementos da diagonal principal $(\hat{I}_{11}^{-1} \dots \hat{I}_{pp}^{-1})$ são as estimativas da variância de $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$.

CAPÍTULO 3 TESTES ACELERADOS COM TENSÃO APLICADA EM ESCADA

Será apresentado o método de máxima verossimilhança para se obter um modelo aproximado para o tempo de vida em função do nível de tensão aplicado em escada, que pode ser censurado (NELSON, 1980). Será mostrado, também, que este modelo é uma extensão probabilística do modelo linear de danos acumulados (Modelo de Palmgren e Miner) (TANG et al., 1996).

3.1 Modelo Probabilístico para o Tempo de Falha

3.1.1 Efeito de Dano Acumulado

O modelo pressupõe que a vida restante dos corpos-de-prova depende somente da probabilidade de falha acumulada atual e do nível de tensão aplicado – independente de como a probabilidade está acumulada. Além disso, se for mantido o nível de tensão aplicado, os sobreviventes falharão de acordo com a função de distribuição para aquele nível de tensão, mas iniciando na fração de falha acumulada anterior.

A apresentação gráfica do modelo probabilístico para o tempo de falha, como função do nível de tensão aplicado em escada, é mostrada nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3. A Figura 3.1 descreve uma configuração de tensão aplicada em escada com quatro degraus. Ela mostra tempos de falha e de censura de corpos-de-prova. A Figura 3.2 descreve as quatro funções de distribuição para os degraus constantes (S_1 , S_2 , S_3 e S_4). As setas mostram que os corpos-de-prova seguem primeiro a função de distribuição para S_1 até o tempo t_1 . Quando o nível de tensão aumenta de S_1 para S_2 , os corpos-de-prova que não falharam continuam ao longo da função de distribuição de S_2 , começando na fração de falha acumulada. Similarmente, quando o nível de tensão cresce de S_2 para S_3 e de S_3 para S_4 os corpos-de-prova que não falharam continuam ao longo da próxima função de distribuição, começando na fração de falha acumulada. A função de distribuição para o tempo de vida sob a configuração de tensão aplicada em escada aparece na Figura 3.3 e é formada pelos segmentos das funções de distribuição para nível constante de tensão da Figura 3.2, (NELSON, 1980).

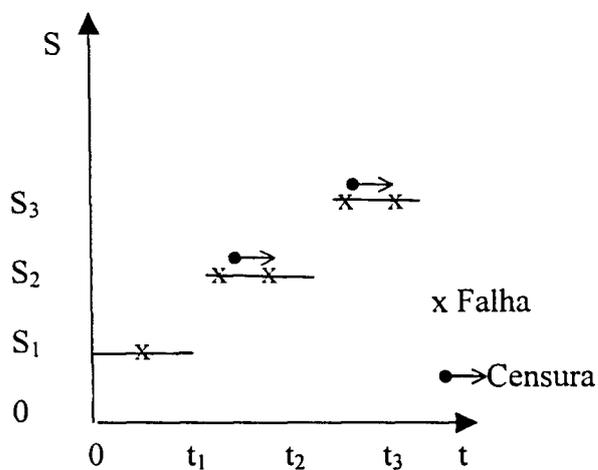


Figura 3.1: Tempo de falha e de censura numa configuração de tensão aplicada em escada com três degraus (NELSON, 1980).

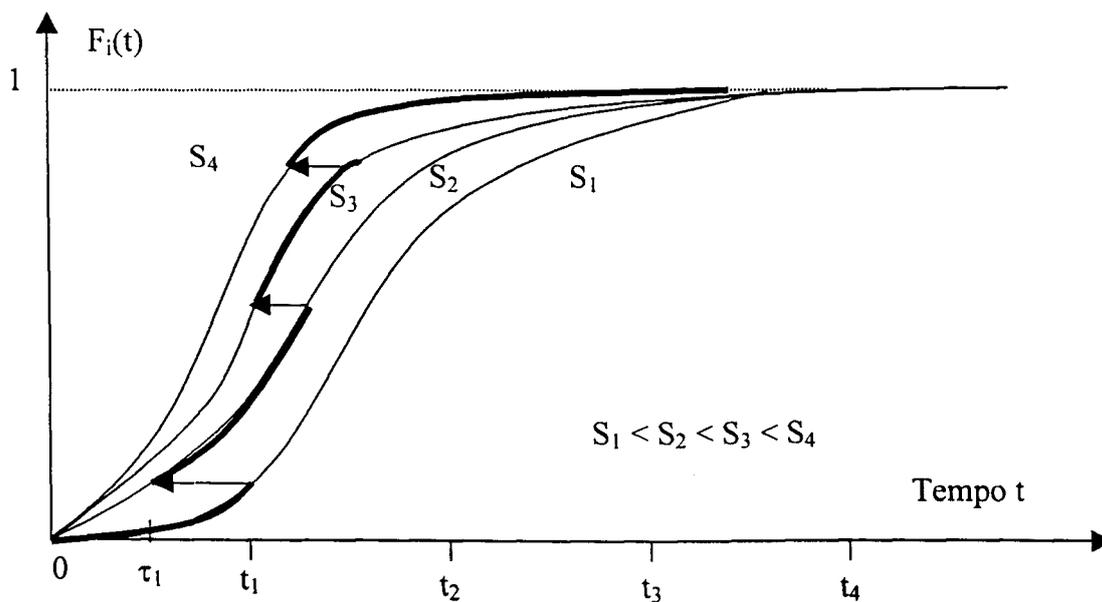


Figura 3.2: Funções de distribuição para os três degraus constantes (S_1 , S_2 e S_3) e os tempos equivalentes (NELSON, 1980).

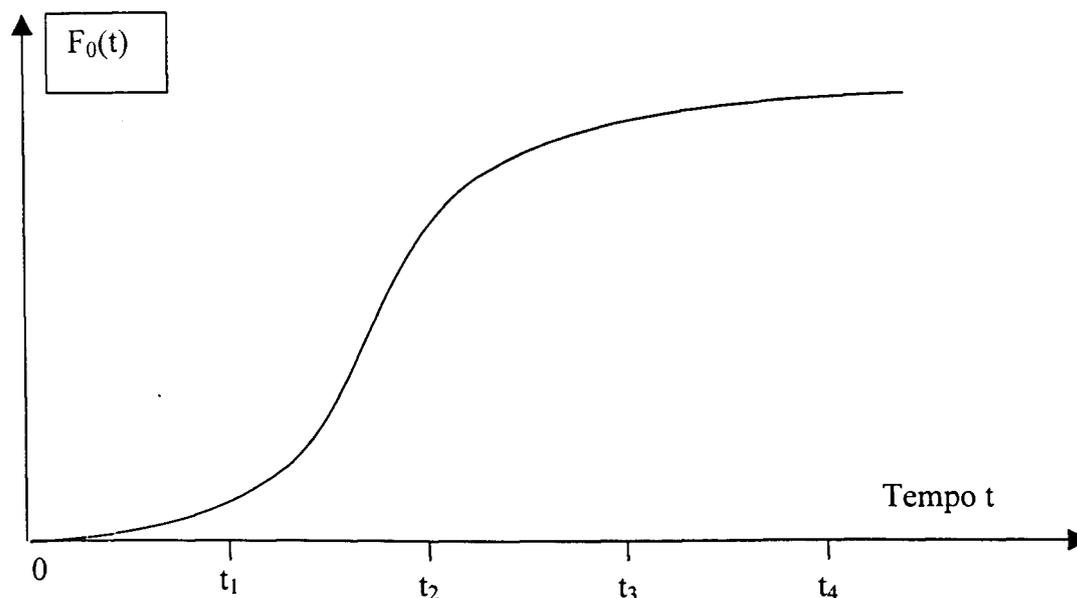


Figura 3.3: Modelo probabilístico para o tempo de falha como função do nível de tensão aplicada em escada (NELSON, 1980).

Matematicamente, este modelo é expresso a seguir, onde se obterá a função de distribuição $F_0(t)$ do tempo até a falha sob uma configuração particular de tensão aplicada em escada com k degraus. Suponha que, para uma configuração particular, o degrau i corresponda ao nível de tensão S_i , iniciando no tempo t_{i-1} até o tempo t_i , sendo $i = 1, 2, \dots, k$ e $t_0 = 0$. A função de distribuição do tempo de falha no nível de tensão constante S_i é denotado por $F(S_i, t)$.

No degrau 1, a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham é

$$F_0(t) = F(S_1, t), \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

No degrau 2, o tempo de início equivalente (τ_1) é o que teria produzido a mesma fração de falha acumulada da população no degrau 1 (como descrito na Figura 3.2); isto é, τ_1 é a solução de

$$F(S_1, \Delta t_1 + \tau_0) = F(S_2, \tau_1), \quad \text{onde: } \tau_0 = 0, \Delta t_1 = t_1 - t_0.$$

A fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau 2 é

$$F_0(t) = F(S_2, t - t_1 + \tau_1), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Do mesmo modo, o tempo de início equivalente (τ_2) no degrau 3 é o que teria produzido a mesma fração de falha acumulada da população no degrau 2, isto é, τ_2 é a solução de

$$F(S_2, \Delta t_2 + \tau_1) = F(S_3, \tau_2), \quad \text{onde } \Delta t_2 = t_2 - t_1.$$

A fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau 3 é

$$F_0(t) = F(S_3, t - t_2 + \tau_2), \quad t_2 \leq t \leq t_3.$$

Em geral, o tempo de início equivalente (τ_i) no degrau $i + 1$ é o que teria produzido a mesma fração de falha acumulada da população no degrau i , isto é, τ_i é a solução de

$$F(S_i, \Delta t_i + \tau_{i-1}) = F(S_{i+1}, \tau_i), \quad \text{onde } \Delta t_i = t_i - t_{i-1} \text{ e } i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.1)$$

A fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau $i+1$ é

$$F_0(t) = F(S_{i+1}, t - t_i + \tau_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \quad (3.2)$$

Para o caso da *log-normal e relação de potência inversa*, a $F(S_i, t)$ é:

$$F(S_i, t) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[t \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right] \right\}.$$

De (3.1), o tempo de início equivalente (τ_i) no degrau $i + 1$ é

$$\Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[(\Delta t_i + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right] \right\} = \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[\tau_i \left(\frac{S_{i+1}}{A} \right)^\omega \right] \right\},$$

portanto,

$$-\frac{1}{\sigma} \ln \left[(\Delta t_i + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right] = -\frac{1}{\sigma} \ln \left[\tau_i \left(\frac{S_{i+1}}{A} \right)^\omega \right],$$

e

$$\tau_i = (\Delta t_i + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{S_{i+1}} \right)^\omega. \quad (3.3)$$

Usando (3.2), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau $i+1$ é:

$$F_0(t) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[(t - t_{i-1} + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right] \right\}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (3.4)$$

e τ_{i-1} é dado pela fórmula recursiva (3.3).

Para o caso da *Weibull e relação de potência inversa*, a $F(S_i, t)$ é:

$$F(S_i, t) = 1 - \exp \left\{ - \left[t \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\}$$

De (3.1), o tempo de início equivalente (τ_i) no degrau $i + 1$ é

$$\exp \left\{ - \left[(\Delta t_i + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\} = \exp \left\{ - \left[\tau_i \left(\frac{S_{i+1}}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\},$$

e, portanto,

$$\tau_i = (\Delta t_i + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{S_{i+1}} \right)^\omega \quad (3.5)$$

Usando (3.2), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau $i+1$ é:

$$F_0(t) = 1 - \exp \left\{ - \left[(t - t_{i-1} + \tau_{i-1}) \left(\frac{S_i}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (3.6)$$

e τ_{i-1} é obtido através de (3.5).

Para o caso da *log-normal e relação de Arrhenius*, a $F(S_i, t)$ é:

$$F(S_i, t) = 1 - \Phi \left\{ - \frac{1}{\sigma} \ln \left[\frac{t}{C \exp \left(\frac{E}{kS_i} \right)} \right] \right\}.$$

De (3.1), o tempo de início equivalente (τ_i) no degrau $i + 1$ é

$$\Phi \left\{ - \frac{1}{\sigma} \ln \left[\frac{\Delta t_i + \tau_{i-1}}{C \exp \left(\frac{E}{kS_i} \right)} \right] \right\} = \Phi \left\{ - \frac{1}{\sigma} \ln \left[\frac{\tau_i}{C \exp \left(\frac{E}{kS_{i+1}} \right)} \right] \right\},$$

portanto,

$$\frac{\Delta t_i + \tau_{i-1}}{C \exp\left(\frac{E}{kS_i}\right)} = \frac{\tau_i}{C \exp\left(\frac{E}{kS_{i+1}}\right)},$$

e

$$\tau_i = (\Delta t_i + \tau_{i-1}) \exp\left[\frac{E}{k} \left(\frac{1}{S_{i+1}} - \frac{1}{S_i}\right)\right]. \quad (3.7)$$

Usando (3.2), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau $i+1$ é:

$$F_0(t) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[\frac{t - t_{i-1} + \tau_{i-1}}{C \exp\left(\frac{E}{kS_i}\right)} \right] \right\}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad (3.8)$$

e τ_{i-1} é dado pela fórmula recursiva (3.7).

Para o caso da *Weibull e relação de Arrhenius*, a $F(S_i, t)$ é:

$$F(S_i, t) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t}{C \exp\left(\frac{E}{kS_i}\right)} \right]^\gamma \right\}$$

De (3.1), o tempo de início equivalente (τ_i) no degrau $i + 1$ é

$$\exp \left\{ - \left[\frac{\Delta t_i + \tau_{i-1}}{C \exp\left(\frac{E}{kS_i}\right)} \right]^\gamma \right\} = \exp \left\{ - \left[\frac{\tau_i}{C \exp\left(\frac{E}{kS_{i+1}}\right)} \right]^\gamma \right\},$$

e, portanto,

$$\tau_i = (\Delta t_i + \tau_{i-1}) \exp\left[\frac{E}{k} \left(\frac{1}{S_{i+1}} - \frac{1}{S_i}\right)\right] \quad (3.9)$$

Usando (3.2), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no degrau $i+1$ é:

$$F_0(t) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t - t_{i-1} + \tau_{i-1}}{C \exp \left(\frac{E}{kS_i} \right)} \right]^\gamma \right\}, \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad (3.10)$$

e τ_{i-1} é dado pela fórmula recursiva (3.9).

3.1.2 Função de Verossimilhança

A função de verossimilhança foi apresentada na Seção 2.3, que na notação acima pode ser escrita como:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f_o(t_i)]^{\delta_i} [1 - F_o(t_i)]^{1 - \delta_i}$$

onde $F_o(t)$ é dado por (3.4) ou (3.6) para log-normal e Weibull, respectivamente, e $f_o(t) = \frac{dF_o(t)}{dt}$.

3.2 Teoria de Acúmulo de Danos – Modelo de Palmgren e Miner

Essa teoria de acúmulo de danos foi proposta em 1924 por Palmgren e desenvolvida posteriormente por Miner, conforme descrito por COLLINS (1981) e por SOBCZYK e SPENCER (1992). Esta teoria pode ser explicada através do uso de uma curva S-T esquemática, como mostrada na Figura 3.4. Ela prevê que o dano parcial D_i sob o nível de tensão S_i é diretamente proporcional à razão entre o tempo de operação (t_i) e o tempo de vida ξ_i , ou seja,

$$D_i = \frac{t_i}{\xi_i}$$

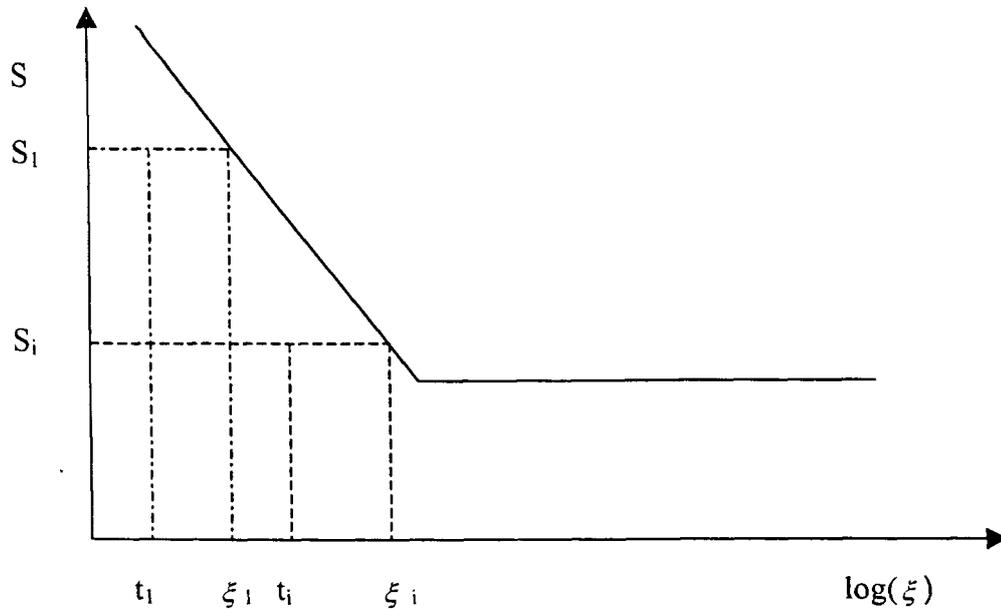


Figura 3.4: Curva S-T esquemática (COLLINS, 1981)

Se o valor do nível de tensão aplicado for alterado, ocorrerá um novo dano parcial, que é calculado para este novo nível de tensão, onde o valor apropriado de ξ é determinado na curva S-T.

Assim, quando um corpo-de-prova arbitrário é submetido a tensões que variam em escada, o dano é linearmente acumulado. Isto é, se um corpo-de-prova foi submetido ao nível de tensão S_k por um tempo t_k , $k = 1, 2, \dots, i$, o dano acumulado é:

$$D_i = \sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\xi_k} \quad (3.7)$$

O pressuposto do modelo de Palmgren e Miner é que, para um corpo-de-prova que não tenha falhado, em qualquer nível de tensão, seu tempo equivalente inicial depende somente do dano acumulado anteriormente, independente de como aquele dano foi acumulado. Então, esse pressuposto pode ser expresso como a seguir:

$$\frac{t_i + \tau_{i-1}}{\xi_i} = \frac{\tau_i}{\xi_{i+1}}, \text{ sendo } \tau_0 \equiv 0 \text{ e } i = 1, 2, \dots, N-1.$$

A expressão (3.7) relaciona o dano submetido a vários níveis de tensão, tal que, para o modelo linear de dano acumulado, o tempo de operação equivalente para S_i é:

$$\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\xi_k} = \frac{t_1}{\xi_1} + \frac{t_2}{\xi_2} + \dots + \frac{t_i}{\xi_i}$$

De (3.4), obtém-se:

$$\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\xi_k} = \frac{\tau_1}{\xi_2} + \frac{t_2}{\xi_2} + \dots + \frac{t_i}{\xi_i} = \frac{\tau_2}{\xi_2} + \dots + \frac{t_i}{\xi_i} = \dots = \frac{\tau_{i-1} + t_i}{\xi_i}$$

Então,

$$\tau_{i-1} + t_i = \xi_i \sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\xi_k}$$

Se o tempo de operação equivalente for igual ao tempo de falha, isto é, $\tau_{N-1} + t_N = \xi_N$, então:

$$\sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\xi_i} = 1.$$

Esta condição de falha é o modelo de Palmgren e Miner.

3.3 Comparação do Modelo de Palmgren e Miner com o Modelo de Nelson

Para comparar o modelo linear de dano acumulado com o modelo de Nelson, é preciso deduzir uma expressão para o dano acumulativo sob o modelo de Nelson. Para ilustração, vamos supor que a vida de um produto segue uma distribuição de Weibull, com parâmetro de escala dependente do nível de tensão:

$$R(S_i, t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha_i} \right)^\gamma \right]. \quad (3.8)$$

De (3.1) e (3.8), os tempos inicial (τ_i) e de operação equivalente ($\tau_i + \Delta t_{i+1}$) em S_{i+1} são:

$$\exp \left[- \left(\frac{\tau_i}{\alpha_{i+1}} \right)^\gamma \right] = \exp \left[- \left(\frac{\Delta t_i + \tau_{i-1}}{\alpha_i} \right)^\gamma \right],$$

logo,

$$\frac{\tau_i}{\alpha_{i+1}} = \frac{\Delta t_i + \tau_{i-1}}{\alpha_i}.$$

Então,

$$\tau_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} (\Delta t_i + \tau_{i-1}). \quad (3.9)$$

Por indução matemática, provaremos que:

$$\tau_i = \sum_{k=1}^i \alpha_{i+1} \frac{\Delta t_k}{\alpha_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.10)$$

Demonstração:

sendo $i = 1$ e em conformidade com (3.9)

$$\tau_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Delta t_1,$$

então (3.10) é verdade para $i = 1$. Seja (3.10) verdadeira para $i = m$, então:

$$\tau_m = \sum_{k=1}^m \alpha_{m+1} \frac{\Delta t_k}{\alpha_k}. \quad (3.11)$$

Mostraremos, a seguir, que (3.10) é verdadeira para $i = m+1$.

De (3.9),

$$\tau_{m+1} = \frac{\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}} (\Delta t_{m+1} + \tau_m).$$

Substituindo τ_m pela expressão (3.11), vem que:

$$\begin{aligned} \tau_{m+1} &= \frac{\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}} \left(\Delta t_{m+1} + \sum_{k=1}^m \alpha_{m+1} \frac{\Delta t_k}{\alpha_k} \right) \\ &= \frac{\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}} \Delta t_{m+1} + \sum_{k=1}^m \alpha_{m+2} \frac{\Delta t_k}{\alpha_k} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{m+2} \frac{\Delta t_k}{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Dessa forma, conclui-se que (3.10) é verdadeira para todo i .

Da expressão (3.10) obtém-se o tempo de operação equivalente em S_i , ou seja:

$$\tau_{i-1} + \Delta t_i = \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_i \frac{\Delta t_k}{\alpha_k} + \Delta t_i = \sum_{k=1}^i \alpha_i \frac{\Delta t_k}{\alpha_k}.$$

Seja o tempo de operação equivalente igual ao tempo de falha, ou seja $\tau_{N-1} + \Delta t_N = \xi_N$, então:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^N \alpha_i \frac{\Delta t_k}{\alpha_k} = \alpha_i \sum_{k=1}^N \frac{\Delta t_k}{\alpha_k}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta t_i}{\xi_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta t_i}{\alpha_i} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{\Delta t_k}{\alpha_k}} = 1.$$

Assim, o modelo de Nelson tem a mesma condição de falha que a regra de Palmgren e Miner ou seja, o modelo de Nelson pode ser considerado como uma extensão probabilística do modelo de Palmgren e Miner.

CAPÍTULO 4 APLICAÇÃO DO MODELO ESTATÍSTICO PARA UM TESTE ACELERADO COM TENSÃO EM ESCADA

Será apresentada uma aplicação do modelo estatístico para um teste acelerado com tensão em escada em um conjunto de dados experimentais, obtendo-se os resultados das estimativas de máxima verossimilhança e os correspondentes intervalos de confiança. Como aplicação do modelo ajustado, serão apresentadas as estimativas e os intervalos de confiança correspondentes para os percentis relacionados a diversos níveis de tensão, dentro dos valores limites dos níveis de tensão adotados na experiência. Por último, serão apresentadas as derivadas de primeira e segunda ordem da função de verossimilhança e o método usado para obter as estimativas dos parâmetros do modelo estatístico.

Nesta aplicação será utilizada a distribuição de Weibull para descrever os tempos de vida até a falha (ou número de ciclos até a falha) de corpos de prova submetidos a teste de fadiga. A utilização desta distribuição baseou-se no fato que a literatura e profissionais especialistas na área utilizam mais tal distribuição (ZAHAVI, 1996).

4.1 Dados Experimentais

O estudo das propriedades de fadiga tem se tornado muito importantes nas aplicações de produtos de metalurgia do pó. Estes materiais estão cada vez mais sendo usados como componentes sujeitos a ciclos de carregamento, e, portanto, têm surgido limitações de desempenho associadas com falhas de fadiga.

Os dados experimentais utilizados para aplicação do modelo de tensão em escada foram extraídos do artigo de PALMA e MANSUR (1998).

O material usado foi uma liga Fe-1,88%Ni-1,34%Cu-0,50%Mo, feita de pós pré-ligados. Amostras foram feitas misturando pós pré-ligados com 0,5% em peso de lubrificante (estearato de zinco).

Corpos-de-prova, como o mostrado na Figura 4.1, foram produzidos usando matriz flutuante. A pressão de compactação foi tal que somente um nível de porosidade após sinterização ($P_0 = 7,1\%$) foi produzido. A sinterização do corpo-de-prova foi realizada por 30 min a 1190 °C, em uma atmosfera de 80% nitrogênio-20% hidrogênio.

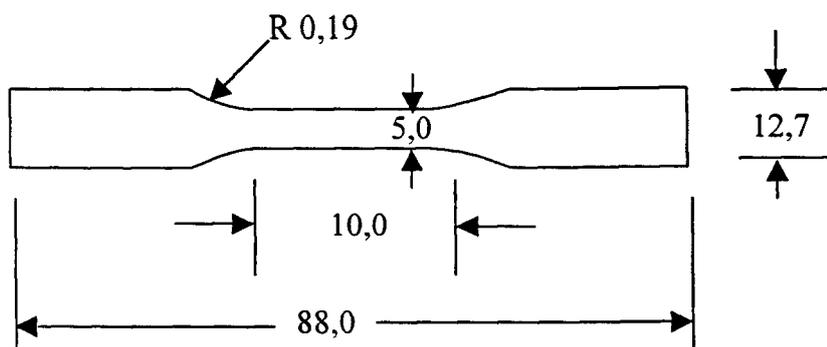


Figura 4.1: Corpo-de-prova para ensaio de fadiga – Dimensões em mm (PALMA E MANSUR, 1998)

Os testes de fadiga experimental foram feitos em uma máquina de teste hidráulica, com controle de tensão a temperatura ambiente. Todos os corpos-de-prova foram submetidos a um carregamento tração-compressão com tensão média zero, a uma frequência de 20 Hz. O teste de tensão em escada foi realizado em três degraus: cada corpo-de-prova foi primeiro submetido a 250 MPa durante 4000 ciclos (primeiro degrau), depois a 150 MPa durante 10000 ciclos (segundo degrau). Subseqüentemente, no terceiro degrau, esses corpos-de-prova foram ciclicamente carregados com níveis de tensão variando entre 40 e 70 MPa, cada um com nível de tensão constante, até ocorrer falha ou até a máquina atingir pelo menos 2×10^6 ciclos, o que caracteriza um mecanismo de censura do tipo I. A falha foi definida como fratura completa, e o número de ciclos até a falha foi anotado por T. Os resultados do terceiro degrau estão apresentados na Tabela 4.1, em vista de que nos dois primeiros degraus não ocorreram falhas.

Tabela 4.1: Resultados do 3º Degrau

Corpo-de-prova	Tensão (MPa)	Nº de ciclos
1	70	409090.0
2	70	301010.0
3	70	958900.0
4	70	419426.0
5	70	603814.2
6	70	765471.2
7	70	932553.7
8	70	1099254.0
9	60	595210.8
10	60	869862.0
11	60	982945.2
12	60	520008.0
13	60	1474005.0
14	60	2000000.0
15	60	2000000.0
16	60	2000000.0
17	50	700170.0
18	50	1091814.0
19	50	1345950.0
20	50	811080.0
21	50	2000000.0
22	50	2000000.0
23	50	2000000.0
24	50	2000000.0
25	40	2000000.0
26	40	2000000.0

4.2 Estimativas e Intervalos de Confiança

As estimativas de máxima verossimilhança de A , ω , e γ para o modelo de Weibull – Potência Inversa, como apresentado na Subseção 3.1.1, foram determinadas utilizando tanto o método de Newton de convergência global quanto o método de Broyden para solução de sistemas de equações não lineares, ambos descritos e programados por PRESS et al. (1994). A solução é apresentada nas Tabelas 4.2 e 4.3, onde a variável resposta observada foi transformada para $t^* = 10^{-4}t$, para evitar problemas computacionais oriundos do uso de números muito grandes. A Tabela 4.2 mostra as estimativas dos parâmetros (A , ω e γ) e os limites de confiança aproximados para o nível de confiança de 95%. A Tabela 4.3 mostra a matriz de variância-covariância dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

Tabela 4.2: Resultados das estimativas de máxima verossimilhança

Parâmetro	Estimativa	Limites de Confiança – 95%	
		Inferior	Superior
A	370,45	55,882	685,02
ω	2,8612	1,3035	4,4189
γ	2,6325	0,95691	4,3081

Tabela 4.3: Matriz de Covariância Assintótica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

	A	ω	γ
A	25758	-127,20	-110,61
ω	-127,20	0,63161	0,54743
γ	-110,61	0,54743	0,73084

4.3 Construção dos Intervalos de Confiança para os Percentis Usando o Modelo Ajustado e as Estimativas de Máxima Verossimilhança

O modelo ajustado usando estimativas de máxima verossimilhança para corpos-de-prova de liga Fe-1,88%Ni-1,34%Cu-0,50%Mo que falham após o número de ciclos $t^* = 10^4 t$ é:

$$\hat{R}(S, t^*) = \exp \left\{ - \left[t^* \left(\frac{S}{370,45} \right)^{2,8612} \right]^{2,6325} \right\}$$

e

$$\hat{t}_p^* = \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} [-\ln(1-p)]^{1/2,6325}$$

Nesta expressão, $\hat{\gamma} = 2,6325$ é o parâmetro de forma da distribuição de Weibull, e $\hat{\omega} = 2,8612$ e $\hat{A} = 370,45$ são a potência e a constante de proporcionalidade, respectivamente, da relação de potência inversa para vida e tensão. Os valores destes parâmetros não são conhecidos com tanta precisão quanto o número de algarismos significativos podem sugerir.

Como aplicação do modelo ajustado, serão construídos os intervalos de confiança dos percentis (t_p^*) para diversos valores da tensão. Para tanto, é necessário termos uma estimativa para a variância de \hat{t}_p^* . A expressão desta variância é obtida usando-se o método *delta*, como descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997), cujo resultado é:

$$\begin{aligned} Var(\hat{t}_p^*) = & Var(\hat{A}) \left(\frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial A} \right)^2 + Var(\hat{\omega}) \left(\frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \omega} \right)^2 + Var(\hat{\gamma}) \left(\frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \gamma} \right)^2 + 2Cov(\hat{A}, \hat{\omega}) \frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial A} \frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \omega} + \\ & + 2Cov(\hat{A}, \hat{\gamma}) \frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial A} \frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \gamma} + 2Cov(\hat{\omega}, \hat{\gamma}) \frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \omega} \frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

Sendo $t_p^* = \left(\frac{A}{S} \right)^\omega [-\ln(1-p)]^{1/\gamma}$, as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial A} = \omega \left(\frac{A}{S} \right)^{\omega-1} [-\ln(1-p)]^{1/\gamma},$$

$$\frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \omega} = \left(\frac{A}{S} \right)^\omega \ln \left(\frac{A}{S} \right) [-\ln(1-p)]^{1/\gamma}$$

e

$$\frac{\partial \hat{t}_p^*}{\partial \gamma} = - \left(\frac{A}{S} \right)^\omega \frac{1}{\gamma^2} [-\ln(1-p)]^{1/\gamma} \ln[-\ln(1-p)].$$

Então a expressão da variância de \hat{t}_p^* é

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{t}_p^*) &= \text{Var}(\hat{A}) \left\{ \frac{\hat{\omega}}{S} \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}-1} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \right\}^2 + \text{Var}(\hat{\omega}) \left\{ \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}} \ln \left(\frac{\hat{A}}{S} \right) [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \right\}^2 + \\
&+ \text{Var}(\hat{\gamma}) \left\{ \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}} \frac{1}{\hat{\gamma}^2} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \ln[-\ln(1-p)] \right\}^2 + \\
&+ 2C\hat{\text{ov}}(\hat{A}, \hat{\omega}) \frac{\hat{\omega}}{S} \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}-1} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}} \ln \left(\frac{\hat{A}}{S} \right) [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} + \\
&+ 2C\hat{\text{ov}}(\hat{A}, \hat{\gamma}) \frac{\hat{\omega}}{S} \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}-1} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}} \frac{1}{\hat{\gamma}^2} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \ln[-\ln(1-p)] + \\
&+ 2C\hat{\text{ov}}(\hat{\omega}, \hat{\gamma}) \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}} \ln \left(\frac{\hat{A}}{S} \right) [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \left(\frac{\hat{A}}{S} \right)^{\hat{\omega}} \frac{1}{\hat{\gamma}^2} [-\ln(1-p)]^{1/\hat{\gamma}} \ln[-\ln(1-p)].
\end{aligned}$$

Usando as estimativas das variâncias e das covariâncias das estimativas dos parâmetros do modelo, que aparecem na Tabela 4.3, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{t}_p^*) &= 25758 \cdot \left\{ \frac{2,8612}{S} \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{1,8612} \cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \right\}^2 + \\
&+ 0,63131 \cdot \left\{ \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} \cdot \ln \left(\frac{370,45}{S} \right) \cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \right\}^2 + \\
&+ 0,73084 \cdot \left\{ \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} \cdot \frac{1}{2,6325^2} \cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \cdot \ln[-\ln(1-p)] \right\}^2 + \\
&+ 2 \cdot (-127,20) \cdot \frac{2,8612}{S} \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{1,8612} \cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} \cdot \\
&\cdot \ln \left(\frac{370,45}{S} \right) [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} + \\
&+ 2 \cdot (-110,61) \cdot \frac{2,8612}{S} \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{1,8612} \cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} \cdot \frac{1}{2,6325^2} \cdot \\
&\cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \ln[-\ln(1-p)] - \\
&- 2 \cdot 0,54743 \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} \cdot \ln \left(\frac{370,45}{S} \right) \cdot [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \cdot \left(\frac{370,45}{S} \right)^{2,8612} \cdot \\
&\cdot \frac{1}{2,6325^2} [-\ln(1-p)]^{1/2,6325} \ln[-\ln(1-p)] \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Os resultados dos intervalos de confiança dos percentis são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Estimativa por intervalo dos percentis

S (MPa)	p (percentil)	\hat{t}_p^*	$\widehat{EP}(\hat{t}_p^*)$	Intervalo de 95% de Confiança para \hat{t}_p	
				Inferior x 10 ⁴	Superior x 10 ⁴
100	0,10	18,030	3,346	11,5	24,6
100	0,50	36,879	6,813	23,5	50,2
100	0,90	58,189	17,484	23,9	92,5
90	0,10	24,374	5,237	14,1	34,6
90	0,50	49,855	6,005	38,1	61,6
90	0,90	78,662	17,708	44,0	113,4
80	0,10	34,141	9,406	15,7	52,6
80	0,50	69,833	6,690	56,7	82,9
80	0,90	110,185	16,713	77,4	142,9
70	0,10	50,027	18,093	14,6	85,5
70	0,50	102,327	15,962	71,0	133,6
70	0,90	161,454	18,292	125,6	197,3
60	0,10	77,759	36,653	5,9	149,6
60	0,50	159,051	42,032	76,7	241,4
60	0,90	250,955	42,812	167,0	334,9
50	0,10	131,010	79,584	-25,0	287,0
50	0,50	267,973	107,992	56,3	479,6
50	0,90	422,815	124,776	178,3	667,4

Nota-se que, como o erro padrão estimado $[\widehat{EP}(\hat{t}_p^*)]$ é inversamente proporcional a tensão S, como mostrado na expressão (4.1), quanto menor o valor da tensão maior a imprecisão na estimativa dos percentis. Assim, para o percentil 0,10 correspondente a tensão 50 MPa, o limite inferior é negativo, o que é um absurdo e devemos fornecê-lo como zero.

4.4 Considerações Computacionais

Para se obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo, é necessário encontrar as expressões das derivadas de primeira e de segunda ordem, as quais são apresentadas a seguir.

A função de verossimilhança pode ser representada da seguinte forma:

$$L(A, \omega, \gamma) = \prod_{i=1}^n \left\{ [f_i(A, \omega, \gamma)]^{\delta_i} [R_i(A, \omega, \gamma)]^{1-\delta_i} \right.$$

onde i é o índice para o corpo-de-prova e as funções $f(A, \omega, \gamma)$ e $R(A, \omega, \gamma)$ são dadas, respectivamente, por:

$$f(A, \omega, \gamma) = \gamma (t_i - t_{i-1} + \tau_{i-1})^{\gamma-1} \left(\frac{S_i}{A} \right)^{\omega\gamma} \exp \left[- (t_i - t_{i-1} + \tau_{i-1})^{\gamma} \left(\frac{S_i}{A} \right)^{\omega\gamma} \right]$$

e

$$R(A, \omega, \gamma) = \exp \left[- (t_i - t_{i-1} + \tau_{i-1})^{\gamma} \left(\frac{S_i}{A} \right)^{\omega\gamma} \right], \text{ sendo}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se o item falhar} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O subscrito i denota o nível de tensão aplicado no corpo-de-prova.

A expressão de τ é:

$$\tau_{i-1} = (t_{i-1} - t_{i-2} + \tau_{i-2}) \left(\frac{S_{i-1}}{S_i} \right)^{\omega} = \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \left(\frac{S_k}{S_{i-1}} \right)^{\omega}$$

com $\tau_0 = 0$ e $t_0 = 0$.

Fazendo as mudanças de variáveis, temos que:

$$t_i - t_{i-1} = \Delta t_i,$$

$$X_i = t_i - t_{i-1} + \tau_{i-1} = \Delta t_i + \tau_{i-1}$$

e

$$Y_i = (t_i - t_{i-1} + \tau_{i-1})^{\omega\gamma} \left(\frac{S_i}{A}\right)^{\omega\gamma} = X_i^{\gamma-1} \left(\frac{S_i}{A}\right)^{\omega\gamma},$$

as expressões para $f(A, \omega, \gamma)$ e $R(A, \omega, \gamma)$ tornam-se

$$f(A, \omega, \gamma) = \gamma Y_i \exp(X_i Y_i)$$

e

$$R(A, \omega, \gamma) = \exp(-X_i Y_i).$$

Tomando o logaritmo natural da função $L(A, \omega, \gamma)$ e derivando o resultado em relação a A , ω e γ , obtêm-se

$$F_1(A, \omega, \gamma) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial A} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial A} + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \frac{1}{R_i} \frac{\partial R_i}{\partial A},$$

$$F_2(A, \omega, \gamma) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \omega} + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \frac{1}{R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \omega} \text{ e}$$

$$F_3(A, \omega, \gamma) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \gamma} + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \frac{1}{R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \gamma}.$$

O problema consiste em determinar A , ω e γ , tal que

$$F_1(A, \omega, \gamma) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial A} = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial A} + (1 - \delta_i) \frac{1}{R_i} \frac{\partial R_i}{\partial A} \right] = 0,$$

$$F_2(A, \omega, \gamma) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \omega} + (1 - \delta_i) \frac{1}{R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \omega} \right] = 0 \text{ e}$$

$$F_3(A, \omega, \gamma) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i \frac{1}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \gamma} + (1 - \delta_i) \frac{1}{R_i} \frac{\partial R_i}{\partial \gamma} \right] = 0.$$

A seguir serão apresentadas as derivadas parciais, de primeira e segunda ordem, da função R e da função f , bem como as de segunda ordem da função $\ln(L)$ em relação a A , ω e γ . As derivadas de segunda ordem são necessárias para o cálculo do Jacobiano e da matriz de covariância.

$$F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial A} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial A^2} - \frac{1}{f_i^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial A} \right)^2 \right] + (1 - \delta_i) \left[\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial A^2} - \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial A} \right)^2 \right] \right\},$$

$$F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial A \partial \omega} - \frac{1}{f_i^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial A} \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial \omega} \right) \right] + (1 - \delta_i) \left[\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial A \partial \omega} - \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial A} \right) \left(\frac{\partial R_i}{\partial \omega} \right) \right] \right\},$$

$$F_{13} = \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial A \partial \gamma} - \frac{1}{f_i^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial A} \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial \gamma} \right) \right] + (1 - \delta_i) \left[\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial A \partial \gamma} - \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial A} \right) \left(\frac{\partial R_i}{\partial \gamma} \right) \right] \right\},$$

$$F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial A} = F_{12},$$

$$F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \omega^2} - \frac{1}{f_i^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \omega} \right)^2 \right] + (1 - \delta_i) \left[\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial \omega^2} - \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \omega} \right)^2 \right] \right\},$$

$$F_{23} = \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \omega \partial \gamma} - \frac{1}{f_i^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial \gamma} \right) \right] + (1 - \delta_i) \left[\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial \omega \partial \gamma} - \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial R_i}{\partial \gamma} \right) \right] \right\},$$

$$F_{31} = \frac{\partial F_3}{\partial A} = F_{13},$$

$$F_{32} = \frac{\partial F_3}{\partial \omega} = F_{23},$$

$$F_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_i \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \gamma^2} - \frac{1}{f_i^2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \gamma} \right)^2 \right] + (1 - \delta_i) \left[\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial \gamma^2} - \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \gamma} \right)^2 \right] \right\}.$$

Derivadas Parciais da Função R

$$R = \exp(-X_i Y_i), \quad X_i = X_i(\omega) \text{ e } Y_i = Y_i(A, \omega, \gamma),$$

$$\frac{\partial R}{\partial A} = -X_i R \frac{\partial Y_i}{\partial A},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = -R \left(X_i \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} + Y_i \frac{\partial X_i}{\partial \omega} \right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial \gamma} = -X_i R \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial A^2} = -X_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega} \frac{\partial R}{\partial A} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial A \partial \omega} = -R \frac{\partial X_i}{\partial \omega} \frac{\partial Y_i}{\partial A} - X_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial A} \frac{\partial R}{\partial \omega} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \omega} \right),$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial A \partial \gamma} = -X_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial A} \frac{\partial R}{\partial \gamma} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \gamma} \right),$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \omega \partial A} = \frac{\partial^2 R}{\partial A \partial \omega},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} = -2R \frac{\partial X_i}{\partial \omega} \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \left(X_i \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} + Y_i \frac{\partial X_i}{\partial \omega} \right) - R \left(X_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega^2} + Y_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial \omega^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \omega \partial \gamma} = -\frac{\partial R}{\partial \gamma} \left(X_i \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} + Y_i \frac{\partial X_i}{\partial \omega} \right) - R \frac{\partial X_i}{\partial \omega} \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} - X_i R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega \partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \gamma \partial A} = \frac{\partial^2 R}{\partial A \partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \gamma \partial \omega} = \frac{\partial^2 R}{\partial \omega \partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \gamma^2} = -X_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} \frac{\partial R}{\partial \gamma} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \gamma^2} \right).$$

Derivadas parciais da função f

$$f = \gamma Y_i R,$$

$$\frac{\partial f}{\partial A} = \gamma \left(R \frac{\partial Y_i}{\partial A} + Y_i \frac{\partial R}{\partial A} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = \gamma \left(R \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} + Y_i \frac{\partial R}{\partial \omega} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = Y_i R + \gamma \left(R \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} + Y_i \frac{\partial R}{\partial \gamma} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2} = \gamma \left(2 \frac{\partial Y_i}{\partial A} \frac{\partial R}{\partial A} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A^2} + Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial A^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial \omega} = \gamma \left(\frac{\partial Y_i}{\partial A} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} \frac{\partial R}{\partial A} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \omega} + Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial A \partial \omega} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A \partial \gamma} = R \frac{\partial Y_i}{\partial A} + Y_i \frac{\partial R}{\partial A} + \gamma \left(\frac{\partial Y_i}{\partial A} \frac{\partial R}{\partial \gamma} + \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} \frac{\partial R}{\partial A} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \gamma} + Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial A \partial \gamma} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial A} = \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial \omega},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = \gamma \left(2 \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} \frac{\partial R}{\partial A} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega^2} + Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial \gamma} = R \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} + Y_i \frac{\partial R}{\partial \omega} + \gamma \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega} \frac{\partial R}{\partial \gamma} + \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} \frac{\partial R}{\partial \omega} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega \partial \gamma} + Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial \omega \partial \gamma} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial A} = \frac{\partial^2 f}{\partial A \partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \omega} = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} = 2R \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} + 2Y_i \frac{\partial R}{\partial \gamma} + \gamma \left(2 \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} \frac{\partial R}{\partial \gamma} + R \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \gamma^2} + Y_i \frac{\partial^2 R}{\partial \gamma^2} \right).$$

Derivadas Parciais da função Y_i

$$Y_i = X_i^{\gamma-1} \left(\frac{S_i}{A} \right)^{\omega \gamma},$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial A} = \frac{\omega \gamma}{A} Y_i,$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \omega} = \left[\frac{\gamma-1}{X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \omega} + \gamma \ln \left(\frac{S_i}{A} \right) \right] Y_i,$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} = \left[\ln(X_i) + \omega \ln \left(\frac{S_i}{A} \right) \right] Y_i,$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial A^2} = -\frac{1 + \omega\gamma}{A} \frac{\partial Y_i}{\partial A},$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \omega} = -\frac{\gamma}{A} \left(Y_i + \omega \frac{\partial Y_i}{\partial \omega} \right),$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \gamma} = -\frac{\omega}{A} \left(Y_i + \gamma \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma} \right),$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega \partial A} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \omega},$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega^2} = \frac{\gamma - 1}{X_i} \left[\frac{\partial^2 X_i}{\partial \omega^2} - \frac{1}{X_i} \left(\frac{\partial X_i}{\partial \omega} \right)^2 \right] Y_i + \frac{1}{Y_i} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \omega} \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \omega \partial \gamma} = \left[\frac{1}{X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \omega} + \ln \left(\frac{S_i}{A} \right) \right] Y_i + \left[\frac{\gamma - 1}{X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \omega} + \gamma \ln \left(\frac{S_i}{A} \right) \right] \frac{\partial Y_i}{\partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \gamma \partial A} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial A \partial \gamma},$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \gamma^2} = \left[\ln(X_i) + \omega \ln \left(\frac{S_i}{A} \right) \right]^2 Y_i.$$

Derivadas da Função X_i

$$X_i = t_i - t_{i-1} + \tau_{i-1} = \Delta t_i + \tau_{i-1},$$

$$\tau_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \left(\frac{S_k}{S_{i-1}} \right)^\omega,$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial \omega} = \frac{\partial \tau_{i-1}}{\partial \omega} = \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \left(\frac{S_k}{S_i} \right)^\omega \ln \left(\frac{S_k}{S_i} \right),$$

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 \tau_{i-1}}{\partial \omega^2} = \sum_{k=1}^{i-1} (t_k - t_{k-1}) \left(\frac{S_k}{S_i} \right)^\omega \ln \left(\frac{S_k}{S_i} \right)^2.$$

Em princípio, o sistema de equações

$$\begin{cases} F_1(A, \omega, \sigma) = 0 \\ F_2(A, \omega, \sigma) = 0, \\ F_3(A, \omega, \sigma) = 0 \end{cases}$$

poderia ser resolvido pelo método convencional de Newton-Raphson. No entanto, face a natureza destas equações, pequenos afastamentos em A , ω e σ em relação às raízes provocam grandes oscilações computacionais, inviabilizando a utilização de tal método. Para contornar estas dificuldades, o sistema acima foi resolvido empregando métodos numéricos alternativos. O método de Newton de convergência global e o de Broyden, ambos descritos por PRESS et al. (1994), mostraram-se adequados para a solução do sistema, fornecendo resultados equivalentes.

CAPÍTULO 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi suposto que a variável tempo de vida (ou número de ciclos até a falha) segue a distribuição de Weibull. Esta decisão foi tomada tendo em vista que a literatura e profissionais especialistas na área utilizam muito mais tal distribuição. No entanto, a literatura apresenta uma outra distribuição que possivelmente se preste a descrever esse fenômeno, que é a distribuição log-normal. Para verificar a adequação do modelo ajustado aos dados, uma importante abordagem é a análise de resíduos. Assim, considera-se oportuno como trabalho futuro:

- definir resíduos para o modelo de tensão aplicada em escada;
- desenvolver programas computacionais para aplicação da distribuição log-normal;
- verificar a adequação dos modelos através da análise de resíduos.

Estes são tópicos ainda não desenvolvidos na literatura e, portanto, inéditos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COLLET, D. *Modelling survival data in medical research*. London: Chapman & Hall, 1994.
- COLLINS, J. A. *Failure of materials in mechanical design*. New York: J. Wiley, 1981.
- CORDEIRO, G. M. *Introdução à teoria de verossimilhança*. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Estatística, 1992. Curso oferecido durante a realização do 10^o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- FREITAS, M. A. COLOSIMO, E. A. *Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados*. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 1997. (Série Ferramentas da qualidade, 12).
- GARTHWAITE, P. H., JOLLIFFE, I. T., JONES, B. *Statistical inference*. London: Prentice Hall, 1995.
- GREEN, A. E., BOURNE, A. J. *Reliability technology*. London: Wiley-Interscience, 1972.
- LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. New York: J. Wiley, 1982.
- LIDE, D. R. (Ed.) *CRC handbook of chemistry and physics*. 77. ed. Boca Raton: CRC, 1996.
- MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A., BOES, D. C. *Introduction to the theory of statistics*. 3 ed. Singapore: McGraw-Hill, 1974.
- NELSON, W. Accelerated life testing – step-stress models and data analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, v. R-29, n. 2, p. 103-108, 1980.
- NELSON, W. *Accelerated life testing, statistical models, test plans and data analysis*. New York: J. Wiley, 1990.
- PALMA, E.S., MANSUR, T.R. Fatigue cumulative damage of a sintered steel alloy. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWDER METTALURGY & PARTICULATED MATERIALS, 1-5 June 1998, Las Vegas. *Proceedings...* Princeton: MPIF, 1998. p. 25-29.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in FORTRAN – the art of scientific computing*. 2.ed. New York: Cambridge University Press, 1994
- SOBCZYK, K., SPENCER, Jr. B. F. *Random fatigue: from data to theory*. Boston: Academic Press, 1992.

TANG, L. C., SUN, Y. S., GOH, T. N., ONG, H. L. Analysis of step-stress accelerated-life-test data: a new approach. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 45, n. 1, p. 69-74, 1996.

ZAHAVI, E. *Fatigue design: life expectancy of machine parts*. New York: CRC Press, 1996