

INSTITUTO DE PESQUISAS RADIOATIVAS - UFMG/CNEN

MEDIDA DE LAPLACIANO MATERIAL
NA SUBCRÍTICA URÂNIO

José Lúcio Terra

Tese a ser submetida
ao Corpo Docente
do Curso de Ciências e Técnicas Nucleares da UFMG/CNEN
como parte dos requisitos necessários para a obtenção
do grau de Mestre em Ciência (M.Sc.)

Fevereiro - 1972

A Vanessa

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao colega Fernando A. Nogueira Carneiro pela orientação decisiva na execução deste trabalho.

Agradeço ao colega Omar Campos Ferreira, pela colaboração e incentivo.

Agradeço ao colega Roberto A. Corrieri Moreira, responsável pela programação de computador; ao estagiário Lúcio C. M. Pinto, pela inestimável colaboração nas medidas; ao desenhista Álvaro Samartano, a Yêda Maria Rodrigues, pelo trabalho de datilografia, e a Francisco Freitas de Souza pela execução das cópias e encadernamento deste trabalho.

Í N D I C E

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. EXPERIÊNCIA EXPONENCIAL	3
2.1. Introdução	3
2.2. Distribuição Assintótica do Fluxo de Neutrons Térmicos em um Reticulado Cilíndrico	5
2.3. Influência do Refletor	8
2.4. Transitórios de Espaço Devido à Fonte	9
3. MÉTODOS DE CÁLCULO DO LAPLACIANO	12
3.1. Introdução	12
3.2. O Método dos Momentos	13
3.2.1. Laplaciano axial	13
3.2.2. Laplaciano radial - Método iterativo dos momentos	24
3.3. O Método de Ajuste por Mínimos Quadrados	28
3.3.1. Ajuste axial	28
3.3.2. Ajuste radial	32
4. APRESENTAÇÃO DA SUBCRÍTICA	35
4.1. Descrição da Uranie	35

	Pág.
4.2. Características	35
4.3. Canais de Medida	36
4.4. Reticulado Equivalente	36
5. TÉCNICAS EXPERIMENTAIS	38
5.1. Introdução	38
5.2. Escolha dos Detetores para Mapeamento de Fluxo	38
5.3. Precisão das Medidas	39
5.4. Resultados Experimentais	43
5.5. Discussão dos Resultados Experimentais	44
6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS	47
6.1. Introdução	47
6.2. Laplaciano Radial	47
6.3. Laplaciano Axial	49
6.4. Laplaciano Material	51
7. CONCLUSÕES	52
BIBLIOGRAFIA	54

1. INTRODUÇÃO

1.1. O Instituto de Pesquisas Radioativas vem desenvolvendo, através da Divisão de Reatores, um programa de estudos de reatores, visando a avaliação das possibilidades dos diversos ciclos de combustível e, em particular, do ciclo do tório, no programa nuclear brasileiro.

Uma premissa fundamental do programa era a formação de uma equipe de engenheiros capaz de realizar e interpretar estudos, projetos e experiências relacionadas com a tecnologia de reatores.

O programa experimental previa o projeto e a construção de um conjunto subcrítico a urânio natural-água pesada (CAPITU) que permitisse verificar e ajustar os formulários de cálculo adotados no projeto de um reator sobre o qual se desenvolveriam os estudos do ciclo de combustível (Projeto INSTINTO).

Considerou-se que a exploração da subcrítica "CAPITU" exigiria uma equipe já versada nas medidas fundamentais, entre elas a do laplaciano material, devendo o treinamento dessa equipe ser realizado com o equipamento disponível. Para esse efeito, a subcrítica "URANIE", a urânio natural-água leve, apresenta particularidades interessantes: as dimensões são modestas ($R = 48$ cm, $H = 100$ cm) e o combustível é

de urânio natural metálico. Dispõe de uma fonte de neutrons Am-Be ($Q = 4.8 \times 10^6 \text{ n.s}^{-1}$) insuficientemente moderados por um pedestal de grafita de 20 cm de altura. O fator de multiplicação efetivo, medido estaticamente, é de cerca de 0,86.

Assim, quase todos os problemas que dificultam a medida do laplaciano material devem aparecer na Uranie, fato já verificado e relatado [3].

Os resultados das medidas efetuadas em uma Uranie na França mostraram uma incerteza de 200% sobre o laplaciano material, quando os dados foram tratados pelo método de ajuste de curvas.

Recentemente, H.S.Cheng [4] propôs um novo método de tratamento de dados, o método dos momentos, que contorna a maior parte das dificuldades de medidas em subcríticas de pequenas dimensões. Este método se aplica inclusive a montagens miniaturizadas a D_2O , para as quais o método de ajuste de curvas sofre de graves inconvenientes.

O desenvolvimento do programa experimental do IPR poderá, pois, se beneficiar de um bom conhecimento do método dos momentos.

Assim, colocou-se como objetivo principal do presente trabalho a aplicação do método dos momentos ao conjunto subcrítico Uranie".

2. EXPERIÊNCIA EXPONENCIAL

2.1. INTRODUÇÃO

A teoria exponencial é já bastante conhecida. Nós nos limitaremos, neste capítulo, a assinalar os pontos que nos interessam em nosso caso particular.

Nos limitaremos à distribuição do fluxo longe da fonte e das fronteiras. Esta distribuição, própria do núcleo, é utilizável na maioria das aplicações práticas da técnica exponencial, particularmente na determinação do laplaciano material [5].

Uma hipótese fundamental é que, para um reator nu, crítico, a distribuição do fluxo de neutrons $\Phi(\vec{r}, \epsilon)$ é separável em espaço e energia. A distribuição em espaço é a solução fundamental da equação da onda de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Phi(r) + B^2 \Phi(r) = 0 \quad (2.1)$$

Esta hipótese só é aplicável a um reticulado subcrítico com a condição deste estar suficientemente próximo da criticalidade.

O menor valor característico da equação (2.1), que é tal que

a distribuição de fluxo é positiva em todos os pontos e nula nas fronteiras extrapoladas do reticulado, é definido como laplaciano geométrico.

A distribuição assintótica do fluxo de neutrons térmicos satisfaz a equação do reticulado [5]:

$$L^2 \nabla^2 \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}) + k_{\infty} \int K(\vec{r}, \vec{r}') \Phi(\vec{r}') d\vec{r}' = 0 \quad (2.2)$$

onde $k_{\infty} K(\vec{r}, \vec{r}')$ representa o número de neutrons térmicos produzidos no volume unitário em \vec{r} pela absorção de um neutron térmico em \vec{r}' . Se $K(\vec{r}, \vec{r}')$ é um kernel de deslocamento isotrópico (isto é, $K(\vec{r}, \vec{r}') = K(|\vec{r} - \vec{r}'|)$) e $\Phi(\vec{r})$ satisfaz a equação de onda (2.1): então

$$\int K(\vec{r}, \vec{r}') \Phi(\vec{r}') d\vec{r}' = K(B) \Phi(\vec{r})$$

Se a hipótese precedente é válida, a equação (2.2), combinada com (2.1), conduz à equação característica do reticulado:

$$-(L^2 B^2 + 1) + k_{\infty} K(B) = 0 \quad (2.3)$$

onde $K(B)$ é a transformada de Fourier do "kernel" de moderação [3].

A menor solução da equação (2.3) é o laplaciano material B_m^2 do reticulado.

Esta constante, considerando-se os dois primeiros termos da probabilidade antifuga $K(B_m)$, se exprime:

$$B_m^2 = \frac{k_{\infty} - 1}{L^2 + \delta k_{\infty}} \quad (2.4)$$

Se o reticulado está suficientemente próximo da criticidade, a distribuição do fluxo de neutrons térmicos, longe das fontes e

das fronteiras, satisfaz a equação da onda (2.1) com $B^2 = B_m^2$.

2.2. DISTRIBUIÇÃO ASSINTÓTICA DO FLUXO DE NEUTRONS TÉRMICOS EM UM RETICULADO CILÍNDRICO

A equação da onda se exprime em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 \phi(\vec{r})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi(\vec{r})}{\partial z^2} + B_m^2 \phi(\vec{r}) = 0 \quad (2.5)$$

onde: $\phi(\vec{r}) = \phi(r, z)$

Utilizando-se o processo de separação de variáveis, seja

$$\phi(r, z) = R(r)Z(z)$$

sendo o fluxo sempre positivo e nulo nos limites extrapolados do reticulado. Se o fluxo é suposto finito em todos os pontos e nulo na altura extrapolada do reticulado, a distribuição assintótica do fluxo de neutrons térmicos, solução de (2.5), é:

$$\phi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\alpha_m r) \frac{\text{senh } \delta_m (H-z)}{\text{senh } \delta_m H} \quad (2.6)$$

ou

$$\phi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\alpha_m r) e^{-\delta_m z} [1 - e^{-2\delta_m (H-z)}] \quad (2.7)$$

α_n^2 e γ_m^2 são, respectivamente, os laplacianos radial e axial correspondentes ao modo n. Os A_n são constantes que podem ser determinadas pelas condições aos limites no plano $z = 0$. O laplaciano material B_m^2 será

$$B_m^2 = \alpha_n^2 + \gamma_m^2$$

Utilizando a outra condição do fluxo se anular no raio extra polado do cilindro temos:

$$J_0(\alpha_n r) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{j_n}{R}$$

j_n são os zeros sucessivos da função de Bessel.

A expressão (2.7) do laplaciano material mostra que o comprimento de relaxação $1/\gamma_1$ decresce à medida que cresce a ordem n dos harmônicos, ou seja:

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$$

Os harmônicos de ordem superior desaparecem, especialmente, mais rapidamente que o fundamental segundo a direção z. As medidas podem ser feitas, teoricamente, no domínio onde a intensidade dos harmônicos superiores é desprezível em relação àquela do fundamental. Neste domínio, a distribuição assintótica do fluxo de neutrons térmicos, a uma distância suficiente da extremidade superior para que o termo

$$c = 1 - \exp[-2 \gamma_1 (H - z)]$$

não intervenha, é dado por:

$$Q(r, z) = A_1 J_0\left(\frac{j_1 r}{R}\right) \exp[-\gamma_1 z] \quad (2.8)$$

(2.9)

com

$$B_m^2 = \left(\frac{\rho_1}{R}\right)^2 - \gamma_1^2$$

É a dependência da densidade de neutrons em z que dá o nome "exponencial" à experiência.

São as equações (2.8) e (2.9) a base desta análise. A determinação do laplaciano material se limita à determinação do raio extrapolado R e do inverso do comprimento de relaxação γ_1 a partir da medida do fluxo de neutrons térmicos no domínio onde o fundamental está isolado.

A existência deste domínio permite uma boa precisão experimental e um tratamento analítico simples.

Duas hipóteses fundamentais são feitas quando a teoria precedente é aplicada a medidas reais:

- a) A distribuição macroscópica de fluxo é separável da distribuição celular.

Esta hipótese deriva do fato de ser a teoria anterior estritamente aplicável a um meio homogêneo. Esta teoria se aplica a um meio heterogêneo somente se suas dimensões são grandes em relação àquelas de uma célula (caso presente). Apesar da natureza fundamental desta hipótese, sua análise na teoria da difusão é delicada

da |3|.

- b) A distribuição espacial estacionária é separável da distribuição em energia (já mencionada).

Esta hipótese, válida para um reator nu, crítico, pode ser aproximadamente boa para a experiência exponencial próxima da criticidade e em pontos afastados da fonte e dos limites.

O espectro de neutrons em energia se afasta do espectro assintótico à medida que se aproxima da fonte. A determinação do nível a partir do qual o espectro de neutrons é o espectro assintótico se faz através da medida da razão de cádmio.

$$R_{cd} = \frac{\text{Detetor nu}}{\text{Detetor com cádmio}} = \frac{\Phi_{th}}{\Phi_{ep}} + 1$$

Uma região de razão de cádmio constante pode indicar uma região de separabilidade espaço-energia |4|.

2.3. INFLUÊNCIA DO REFLETOR

A teoria precedente não é válida senão longe da fonte e das fronteiras. A distribuição de fluxo em um domínio onde existem transi-tórios de espaço da fonte será tratado proximamente. A influência do refletor é evidenciada pelo tratamento a dois grupos que mostra os transitórios próximos à interface núcleo-refletor que perturbam a distribuição assintótica.

A uma distância suficientemente longe das fontes para que os harmônicos de ordem superior sejam negligíveis, a distribuição do fluxo de neutrons térmicos se exprime [3]:

$$\phi(x, z) = [A_1 J_0(\alpha_1 r) + C_1 I_0(\beta_1 r)] \sinh \gamma_1 (H-z) \quad (2.10)$$

Os transitórios, devido à presença do refletor, perturbam a distribuição assintótica do fluxo de neutrons térmicos sob a forma $C_1 I_0(\beta_1 r)$ que se atenuam à medida que nos afastamos da interface. Barre [3], para um reticulado dodecagonal de 151 barras, determina que a 8 cm da interface núcleo-refletor, a intensidade dos transitórios, devido ao refletor, é de 3% daquele da distribuição assintótica. Trabalhamos a mais de 9 cm da interface, onde a intensidade dos transitórios é da ordem de 1% da distribuição assintótica.

2.4. TRANSITÓRIOS DE ESPAÇO DEVIDO À FONTE

A distribuição do fluxo de neutrons térmicos foi determinada em um domínio suficientemente longe da fonte. Procuraremos agora determinar a região do reticulado onde a influência dos transitórios de espaço da fonte é desprezível.

A presença de diferentes harmônicos na distribuição dos neutrons da fonte leva à excitação dos transitórios de espaço de mesma ordem, na distribuição de fluxo do reticulado. A amplitude destes tran

A uma distância suficientemente longe das fontes para que os harmônicos de ordem superior sejam negligíveis, a distribuição do fluxo de neutrons térmicos se exprime [3]:

$$\phi(x, z) = [A_1 J_0(\alpha_1 r) + C_1 I_0(\beta_1 r)] \sinh \gamma_1 (H-z) \quad (2.10)$$

Os transitórios, devido à presença do refletor, perturbam a distribuição assintótica do fluxo de neutrons térmicos sob a forma $C_1 I_0(\beta_1 r)$ que se atenuam à medida que nos afastamos da interface. Barre [3], para um reticulado dodecagonal de 151 barras, determina que a 8 cm da interface núcleo-refletor, a intensidade dos transitórios, devido ao refletor, é de 3% daquele da distribuição assintótica. Trabalhamos a mais de 9 cm da interface, onde a intensidade dos transitórios é da ordem de 1% da distribuição assintótica.

2.4. TRANSITÓRIOS DE ESPAÇO DEVIDO À FONTE

A distribuição do fluxo de neutrons térmicos foi determinada em um domínio suficientemente longe da fonte. Procuraremos agora determinar a região do reticulado onde a influência dos transitórios de espaço da fonte é desprezível.

A presença de diferentes harmônicos na distribuição dos neutrons da fonte leva à excitação dos transitórios de espaço de mesma ordem, na distribuição de fluxo do reticulado. A amplitude destes tran

sitórios que se atenuam, axialmente, menos rapidamente que os transitórios de energia, é que define o nível a partir do qual a distribuição de fluxo não compreende senão o harmônico fundamental, por conseguinte, o domínio útil para a determinação do laplaciano material.

Barre [3], utilizando um modelo aproximado de fonte térmica, obteve o nível de 56 cm a partir do qual a distribuição do fluxo de neutrons térmicos se reduz ao fundamental.

Portanto, em mais da metade inferior do reticulado, o fluxo é perturbado pelos transitórios de espaço.

Entretanto, deve-se notar que a partir de 27 cm o modo fundamental está isolado segundo a direção z, no nó radial do segundo harmônico que, para um reticulado de 163 barras, ocorre aproximadamente a

$$Rz = \frac{\delta_1}{\delta_2} \times R \approx 17 \text{ cm}$$

A presença da interface superior limita o domínio onde a distribuição de fluxo pode ser expressa pela equação (2.8).

A perturbação devida à extremidade superior se manifesta sob a forma

$$C_E(z) = 1 - \exp \left[-2 \gamma_1 (H - z) \right]$$

Este termo de correção de extremidade calculado para o reticulado de 163 barras com $H = 100$ cm é bastante importante nas proximidades

dades da superfície. Esta perturbação pode ser considerada negligível a uma altura z_c tal que

$$C_E = 0,99, \text{ ou seja, } z_c = 70 \text{ cm.}$$

Como se pode observar, a região não perturbada pelos transi-
tórios é bastante pequena e seria necessária uma correção nas medidas
que forçosamente teriam de ser feitas na região onde há perturbação do
fluxo. A introdução de um pedestal de grafita atenua a intensidade dos
harmônicos presentes na distribuição do fluxo de neutrons e poderemos
trabalhar a partir de um nível $z = 30$ cm do plano da fonte.

3. MÉTODOS DE CÁLCULO DO LAPLACIANO

3.1. INTRODUÇÃO

O laplaciano material é determinado a partir dos dados experimentais por quatro métodos principais de cálculo:

- a. O método clássico compreende a determinação do raio extrapolado e do comprimento de relaxação do modo fundamental. As distribuições radiais de fluxo, bem como as axiais, são analisadas pelo método dos mínimos quadrados.
- b. O método dos momentos que determina o laplaciano radial e axial, independentemente do raio extrapolado e da altura extrapolada, respectivamente.
- c. O método de ortogonalização das funções de Bessel que determina o inverso do comprimento de relaxação a partir das medidas radiais.
- d. O método de variação de carregamento que determina o laplaciano material em função do inverso do comprimento de relaxação.

Utilizaremos em nosso trabalho o método dos momentos e de

ajuste por mínimos quadrados que passamos a descrever.

3.2. O MÉTODO DOS MOMENTOS [4]

O método dos momentos foi desenvolvido e utilizado no MIT para reticulados miniatura devido, principalmente, à dificuldade de se obter bons resultados com os métodos convencionais de tratamento de dados.

3.2.1. Laplaciano axial

O fluxo axial assintótico se distribui como:

$$\phi(z) = A \sinh \gamma (H-z) \quad (3.1)$$

sendo γ^2 o laplaciano axial e H a altura extrapolada.

O momento de ordem n do fluxo é definido como:

$$\phi_n = \int_a^b z^n \phi(z) dz \quad (3.2)$$

onde a e b são as cotas inferior e superior da região assintótica.

Tendo-se em vista a expressão do fluxo em (3.1) teremos:

$$\phi_n = \int_a^b z^n A \sinh \gamma (H-z) dz \quad (3.3)$$

da qual resulta, integrando-se por partes:

$$\varphi_m = \left[\frac{-b^n}{\gamma} \cosh \gamma (H-b) - \frac{n b^{n-1}}{\gamma^2} \sinh \gamma (H-b) \right] - \left[\frac{-a^n}{\gamma} \cosh \gamma (H-a) - \frac{n a^{n-1}}{\gamma^2} \sinh \gamma (H-a) \right] + \frac{n(n-1)}{\gamma^2} \varphi_{m-2} \quad (3.3)$$

A fim de simplificar a expressão acima, será desejável ter o limite inferior igual a zero e, neste caso, a equação (3.3) ficará reduzida a:

$$\varphi'_m = \frac{(-b')^m}{\gamma} \cosh \gamma (H'-b') - \frac{n b'^{m-1}}{\gamma^2} \sinh \gamma (H'-b') + \frac{n(n-1)}{\gamma^2} \varphi'_{m-2} \quad (3.4)$$

A equação (3.4) implica que os momentos do fluxo axial sejam definidos como

$$\varphi'_m = \int_0^{b'} (z')^m \sinh \gamma (H'-z') dz' \quad (3.5)$$

Mostraremos que as expressões (3.2) e (3.5) são equivalentes no que concerne à obtenção de H e γ^2 a partir dos dados experimentais. Para isto, faremos uma translação do sistema de eixos coordenados ao longo de z , tal que no novo sistema a nova coordenada z' é:

$$z' = z - a$$

como indicado na figura 3.1. A substituição da equação anterior na equação (3.2) produz:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \int_0^{(b-a)} (z'+a)^m \sinh \gamma [(H-a) - z'] dz' \\ &= A \int_0^{b'} (z'+a)^m \sinh \gamma (H'-z') dz' \end{aligned}$$

onde $b' = (b - a)$, e $H' = H - a$ é a nova altura extrapolada no siste

ma de coordenada z' . A altura extrapolada no antigo sistema é, portanto, dada por:

$$H = H' + a$$

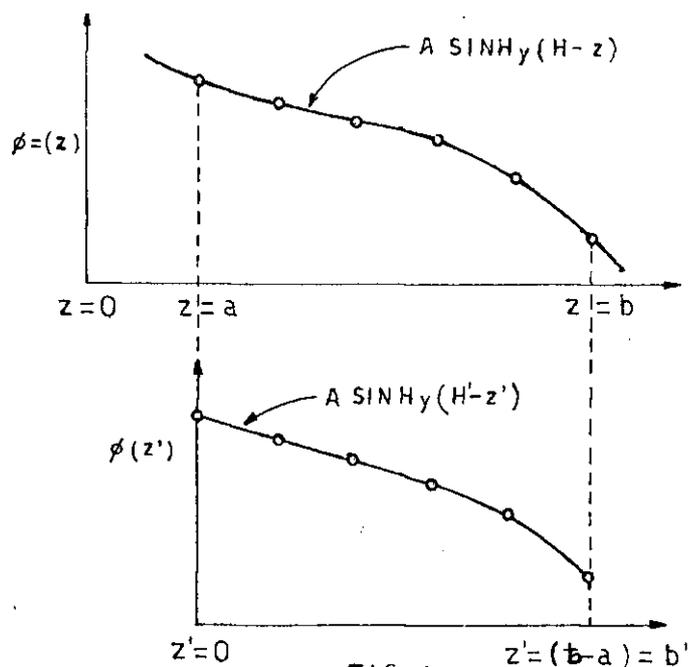


FIG. 1

Sendo a a distância da fonte ao primeiro ponto escolhido no conjunto de dados experimentais.

A essência do método dos momentos consiste em determinar o laplaciano axial independentemente da altura extrapolada.

Para efeito de simplicidade, eliminamos os índices da equação (3.4) e teremos então:

$$\psi_{n-1} = \frac{b^{n-1}}{\gamma} \cosh \gamma(H-b) - \frac{(n-1)b^{n-2}}{\gamma^2} \sinh \gamma(H-b) + \frac{(n-1)(n-2)}{\gamma^2} \psi_{n-3} \quad (3.6)$$

$$\varphi_n = \frac{b^n \cosh \gamma(H-b)}{\gamma} - \frac{n b^{n-1} \sinh \gamma(H-b)}{\gamma^2} + \frac{n(n-1)}{\gamma^2} \varphi_{n-2} \quad (3.7)$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{-b^{n+1} \cosh \gamma(H-b)}{\gamma} - \frac{(n+1)b^n \sinh \gamma(H-b)}{\gamma^2} + \frac{n(n+1)}{\gamma^2} \varphi_{n-1} \quad (3.8)$$

Eliminando nas três equações acima o $\sinh \gamma(H-b)$ e $\cosh \gamma(H-b)$, obtém-se

$$\gamma^2(n) = \frac{n(n+1)\varphi_{n-1} - 2n(n-1)b\varphi_{n-2} + (n-1)(n-2)b^2\varphi_{n-3}}{\varphi_{n+1} - 2b\varphi_n + b^2\varphi_{n-1}} \quad (3.9)$$

$$n = 3, 4, 5, \dots, n, \dots, \infty$$

Assim, o laplaciano axial fica determinado em função do limite superior de integração \underline{b} , dos momentos e da ordem dos momentos.

Uma das maiores vantagens do método dos momentos é eliminar a dependência do laplaciano axial com a altura extrapolada. De fato, uma vez tendo sido determinado o laplaciano axial, a altura extrapolada pode ser calculada dos vários momentos do fluxo axial. Resolvendo as equações (3.7) e (3.8) para $\cosh \gamma(H-b)$ e $\sinh \gamma(H-b)$ temos:

$$H(n) = b + \frac{1}{\gamma} \tanh^{-1} \gamma b \left\{ \frac{\gamma^2 [b\varphi_n - \varphi_{n-1}] + n(n+1)\varphi_{n-1} - n(n-1)b\varphi_{n-2}}{\gamma^2 [n\varphi_{n+1} - n(n+1)b\varphi_n] - n^2(n+1)\varphi_{n-1} + n(n-1)(n+1)b\varphi_{n-2}} \right\} \quad (3.10)$$

O valor da altura extrapolada é:

$$H = H(n) + a$$

onde \underline{a} é a distância da fonte externa ao primeiro ponto experimental

escolhido pela análise.

Como o que se pretende é o cálculo do laplaciano e da altura extrapolada, a partir dos dados experimentais, os momentos serão calculados por

$$\phi_n = \int_0^b z^n A(z) dz$$

$A(z)$ é a distribuição axial da atividade medida, sendo a integração realizada numericamente pela regra de Simpson.

As expressões (3.9) e (3.10) mostram que há vários valores para o laplaciano axial e para a altura extrapolada, sendo cada par $(\frac{2}{z}, H)$ dado por um valor de n .

Segundo um ponto de vista físico, o laplaciano axial pode ser interpretado como o inverso do quadrado do comprimento de relaxação. Em um meio infinito o comprimento de relaxação é idêntico ao comprimento de difusão, visto o processo de difusão descrever completamente o comportamento dos neutrons. A expressão para a área de difusão L^2 , em um meio infinito, é dada em termos da distância média quadrática $\overline{z^2}$ como [6, 7]

$$L^2 = \frac{1}{2} \overline{z^2} = \gamma^{-2} \quad (3.10)$$

Para um meio finito, a expressão correspondente de γ^2 pode ser olhada, em geral, como uma função dos vários momentos espaciais $\overline{z^n}$, seja

$$\gamma^2 = \gamma^2(\bar{z}, \bar{z}^2 \dots \bar{z}^{\bar{n}}).$$

A dependência funcional de γ^2 pode ser obtida de (3.9) dividindo-se o numerador e denominador pelo momento de fluxo axial de ordem zero; o resultado é:

$$\gamma^2 = \frac{n(n-1)\bar{z}^{\bar{n}-1} - 2n(n-1)b\bar{z}^{\bar{n}-2} + (n-1)(n-2)b^2\bar{z}^{\bar{n}-3}}{\bar{z}^{\bar{n}-1} - 2b\bar{z}^{\bar{n}} + b^2\bar{z}^{\bar{n}-1}} \quad (3.11)$$

onde o momento espacial médio $\bar{z}^{\bar{n}}$ é, por definição,

$$\bar{z}^{\bar{n}} = \frac{\int z^n \phi(z) dz}{\int \phi(z) dz}$$

Fazendo na equação (3.11) $b \rightarrow \infty$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \gamma^2 = (n-1)(n-2) \frac{\bar{z}^{\bar{n}-3}}{\bar{z}^{\bar{n}-1}} \quad (3.12)$$

É evidente da equação (3.12) que $n = 3$ leva ao resultado correto para um meio infinito

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \gamma^2(3) = 2 \left(\frac{1}{z^2} \right) \quad (3.13)$$

ou

$$\gamma^{-2}(3) = \frac{1}{2} z^2 = L^2$$

Para um meio infinito o laplaciano axial corresponderia a $n = 3$. No caso de uma montagem subcrítica finita, existem transientes de espaço e energia bem como contribuição dos neutrons da fonte.

Estas contribuições tendem a se anular em função da ordem dos momentos, permanecendo a distribuição assintótica. Os transientes são positivos na região próxima à fonte e negativa na região próxima às fronteiras ($z = H$).

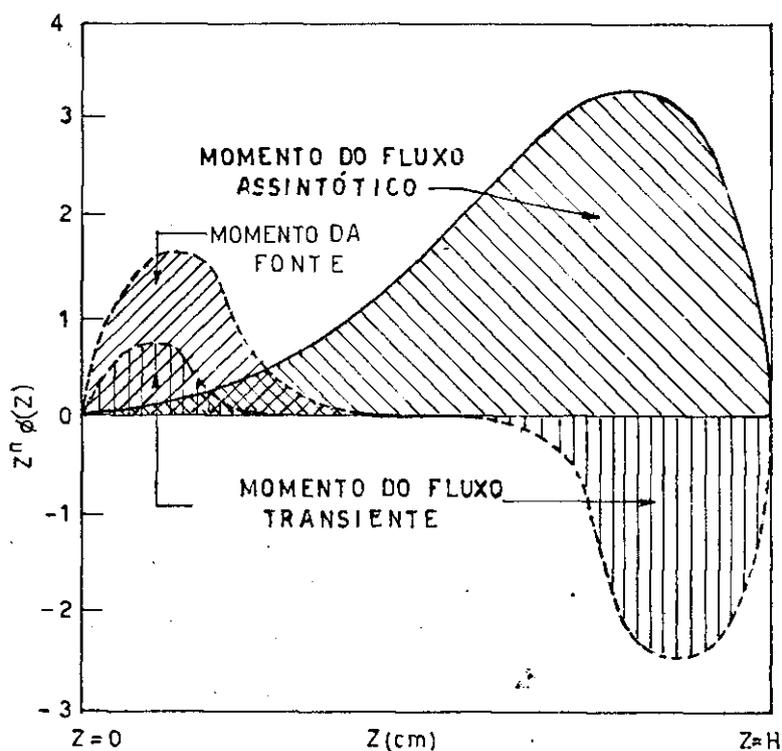


FIG. 2

Além disso, a contribuição da fonte somente se faz notar nas suas proximidades. Desse modo, os momentos dos transientes de fluxo, bem como a contribuição da fonte tendem a se cancelar, dependendo da ordem dos momentos. Deve existir então um valor de n tal que os momentos do fluxo assintótico são retidos e os momentos dos transientes e da contribuição da fonte sejam mínimos.

Uma maneira prática de se determinar o valor ótimo de n é a de se calcular o erro provável em γ^2 e H em função de \underline{n} e tomar o valor de \underline{n} que minimiza estes erros.

Há primariamente duas naturezas de erros associadas com o cálculo do laplaciano axial e altura extrapolada por meio do método dos momentos.

1. O erro experimental decorrido da substituição dos momentos do fluxo axial assintótico pelos momentos correspondentes do fluxo axial experimental (este erro é, digamos, uma medida do desvio da distribuição de fluxo experimental da forma assintótica).
2. O erro de truncamento, isto é, o erro inserido na avaliação dos vários momentos do fluxo por integração numérica.

As duas naturezas de erros combinam para dar o erro provável que será definido abaixo. O erro provável é o erro associado com o próprio método dos momentos, e serve como uma medida da consistência do método bem como uma ferramenta para seleção do melhor valor do laplaciano calculado.

Calcularemos primeiro o erro provável em χ^2 que tomaremos como uma função de ψ_n

$$\chi^2 = \chi^2(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$$

diferenciando obtemos

$$\delta \chi^2 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \chi^2}{\partial \psi_j} \right) \delta \psi_j \quad (3.14)$$

definimos, de acordo com a prática corrente, a variância no laplaciano axial como:

$$\sigma_{\gamma^2}^2 = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \Phi_j} \right)^2 (\delta \Phi_j)^2 = \sum_{j=1}^N C_j (\delta \Phi_j)^2 \quad (3.15)$$

$$C_j = \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \Phi_j} \right)^2$$

O erro provável em γ^2 é definido como:

$$\sigma_{\gamma^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N C_j (\delta \Phi_j)^2} \quad (3.16)$$

Os desvios nos momentos do fluxo axial, $\delta \Phi_j$ derivam de duas fontes: erro experimental e erro de truncamento. Se considerarmos as duas naturezas de erro independentes, temos

$$(\delta \Phi_j)^2 = (\delta \Phi_j^{\text{exp}})^2 + (\delta \Phi_j^{\text{tr}})^2 \quad (3.17)$$

onde $\delta \Phi_j^{\text{exp}}$ é o erro experimental e $\delta \Phi_j^{\text{tr}}$ é o erro de truncamento em Φ_j .

Os coeficientes C_j podem ser obtidos diferenciando-se a equação (3.9) com respeito a Φ_j . Para simplificar, escrevamos a equação (3.9) na forma

$$\gamma^2(n) = \frac{N(n)}{D(n)}$$

onde

$$N(n) = n(m+1)\varphi_{n-1} - 2n(n-1)b\varphi_{n-2} + (n-1)(n-2)b^2\varphi_{n-3}$$

$$D(n) = \varphi_{n+1} - 2b\varphi_n + b^2\varphi_{n-1}$$

donde obtemos, por diferenciação, o seguinte:

$$\frac{\partial Y'(n)}{\partial \phi_{n-3}} = \frac{(n-1)(n-2)b^2}{D(n)}$$

$$\frac{\partial Y'(n)}{\partial \phi_{n-2}} = \frac{2n(n-1)b}{D(n)}$$

$$\frac{\partial Y'(n)}{\partial \phi_{n-1}} = \frac{n(n+1)D(n) - b^2 N(n)}{[D(n)]^2}$$

$$\frac{\partial Y'(n)}{\partial \phi_n} = \frac{2bN(n)}{[D(n)]^2}$$

$$\frac{\partial Y'(n)}{\partial \phi_{n+1}} = \frac{N(n)}{[D(n)]^2}$$

Há cinco coeficientes correspondentes a cinco momentos do fluxo axial: ϕ_{n-3} , ϕ_{n-2} , ϕ_{n-1} , ϕ_n , ϕ_{n+1} , necessários para calcular o laplaciano axial. Eles podem ser combinados numa simples fórmula

$$C_{n,j-4} = \left(\frac{\partial Y'(n)}{\partial \phi_{n+j-4}} \right) \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3.18)$$

Desde que o momento do fluxo teórico ϕ_i^{teor} pode ser determinado analiticamente, é possível calcular o erro de truncamento em ϕ_j da seguinte expressão:

$$\delta \phi_j^{\text{tr}} = [\phi_j^{\text{teor}}]_{\text{Análítica}} - [\phi_j^{\text{teor}}]_{\text{numérica}} \quad (3.19)$$

Os erros experimentais em ϕ_j podem ser estimados da relação:

$$\delta \phi_j^{\text{exp}} = \left[\phi_j^{\text{teor}} - \frac{\phi_j^{\text{exp}}}{A} \right] \quad (3.20)$$

onde ambos, ϕ_j^{teor} e ϕ_j^{exp} são calculados por integração numérica e A é uma constante de normalização a ser determinada. A variância em γ^2 pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma^2}^2(n) &= [\sigma_{\gamma^2}^2(n)]_{\text{exp}} + [\sigma_{\gamma^2}^2(n)]_{\text{tr}} = \\ &= \sum_{j=1}^5 C_{n+j-4} \left\{ [\phi_{n+j-4}^{\text{teor}} - \phi_{n+j-4}^{\text{exp}}]^2 + (\delta \phi_{n+j-4}^{\text{tr}})^2 \right\} \quad (3.21) \end{aligned}$$

A constante de normalização A é determinada minimizando-se o erro provável $\sigma_{\gamma^2}(n)$ ou equivalentemente $\sigma^2 \gamma^2(n)$ em relação a A , isto é:

$$\frac{d(\sigma^2 \gamma^2(n))}{dA} = 0 \quad (3.22)$$

Considerando que $\phi_{n+j-4}^{\text{teor}}$ é independente de A , obtemos de (3.22):

$$A(n) = \frac{\sum_{j=1}^5 C_{n+j-4} (\phi_{n+j-4}^{\text{exp}})^2}{\sum_{j=1}^5 C_{n+j-4} (\phi_{n+j-4}^{\text{teor}}) (\phi_{n+j-4}^{\text{exp}})} \quad (3.23)$$

Nós agora, podemos calcular o erro experimental, o erro de truncamento e conseqüentemente, o erro provável $\sigma_{\gamma^2}(n)$. Os momentos do fluxo teórico devem ser usados para calcular os coeficientes C_{n+j-4} devido à maneira como definimos o erro experimental e o erro de truncamento.

Seguindo o mesmo procedimento nós podemos estimar o erro provável na altura extrapolada \tilde{H} .

3.2.2. Laplaciano radial - Método iterativo dos momentos

O método iterativo dos momentos é um esquema iterativo que corrige repetidamente o laplaciano radial dado por

$$\alpha^2 = \left(\frac{2,4048}{R} \right)^2 \quad (3.24)$$

onde R é o raio extrapolado, até que um valor consistente seja obtido.

Consideremos a distribuição assintótica do fluxo radial dada por $\phi(r) = ArJ_0(\alpha r)$. Suponhamos α_0^2 um valor aproximado para o laplaciano desejado α^2 . Podemos expandir o fluxo radial em uma série de Taylor em torno do valor inicial α_0

$$\begin{aligned} \phi(r, \alpha) &= \phi(r, \alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) \left. \frac{d}{d\alpha} \phi(r, \alpha) \right|_{\alpha = \alpha_0} + \dots \\ &\approx Ar \left\{ J_0(\alpha_0 r) - (\alpha - \alpha_0) r J_1(\alpha_0 r) \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Os momentos do fluxo radial serão segundo definição

$$\phi_n = Ar \int_0^R r^n [J_0(\alpha_0 r) - (\alpha - \alpha_0) r J_1(\alpha_0 r)] dr$$

Restringiremos os índices dos momentos a inteiros ímpares porque nenhum dos momentos pares do fluxo radial podem ser calculados analiticamente.

Para reticulados de pequenas dimensões é de se esperar um erro de truncamento elevado para índices maiores de momentos. Nós nos restringiremos aos três momentos menores do fluxo radial ψ_1, ψ_3, ψ_5 para eliminar a constante de normalização Ar.

Usando as relações

$$\int J_1(x) dx = -J_0(x)$$

$$\int x^n J_1(x) dx = -x^n J_0(x) + n \int x^{n-1} J_0(x) dx$$

nós obteremos os três menores momentos de fluxo radial

$$\phi_1 = Ar \left[\frac{R}{\alpha_0} J_0(\alpha_0 R) - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) F \right] \quad (3.26)$$

$$\phi_3 = Ar \left[G - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) H \right] \quad (3.27)$$

$$\phi_5 = Ar \left[U - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right) V \right] \quad (3.28)$$

onde

$$F = -R^2 J_0(\alpha_0 R) + \frac{2R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R)$$

$$G = \frac{2R^2}{\alpha_0^2} J_0(\alpha_0 R) + \frac{R}{\alpha_0} \left(R^2 - \frac{4}{\alpha_0^2} \right) J_1(\alpha_0 R)$$

$$H = R^2 \left(\frac{8}{\alpha_0^2} - R^2 \right) J_0(\alpha_0 R) + \frac{4R}{\alpha_0} \left(R^2 - \frac{4}{\alpha_0^2} \right) J_1(\alpha_0 R)$$

$$U = \frac{4R^2}{\alpha_0^2} \left(R^2 - \frac{8}{\alpha_0^2} \right) J_0(\alpha_0 R) + \frac{R}{\alpha_0} \left(\frac{64}{\alpha_0^2} + R^4 - \frac{16R^2}{\alpha_0^2} \right) J_1(\alpha_0 R)$$

$$V = -R^4 \left(R^4 + \frac{192}{\alpha_0^4} - \frac{24R^2}{\alpha_0^2} \right) J_0(\alpha_0 R) + \frac{6R}{\alpha_0} \left(\frac{64}{\alpha_0^4} + R^4 - \frac{16R^2}{\alpha_0^2} \right) J_1(\alpha_0 R)$$

A essência do método dos momentos é determinar a quantidade $\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)$ por meio dos momentos do fluxo radial experimental e, daí, corrigir o laplaciano radial repetidamente até que um valor convergente seja obtido. Tomando-se as razões de quaisquer dos momentos acima

obtemos:

$$\text{CASO 1: } \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{G - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right) H}{\frac{R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R) - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right) F}$$

$$\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right)_1 = \frac{G - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \frac{R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R)}{H - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} F} \quad (3.29)$$

$$\text{CASO 2: } \frac{\varphi_5}{\varphi_3} = \frac{U - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right) V}{G - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right) H}$$

$$\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right)_2 = \frac{U - \frac{\varphi_5}{\varphi_3} G}{V - \frac{\varphi_5}{\varphi_3} H} \quad (3.30)$$

$$\text{CASO 3: } \frac{\varphi_5}{\varphi_1} = \frac{U - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right) V}{\frac{R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R) - \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right) F}$$

$$\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right)_3 = \frac{U - \frac{\varphi_5}{\varphi_1} \frac{R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R)}{V - \frac{\varphi_5}{\varphi_1} F} \quad (3.31)$$

o novo laplaciano radial será dado por

$$\alpha^2(i) = \alpha_0^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0}\right)_i \right]^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

O procedimento é repetido até que o critério de convergência seja satisfeito.

Neste trabalho truncamos a série de Taylor no termo de primeira ordem por simplicidade, sem significar, porém, uma limitação.

Podemos estender o tratamento considerando termos de ordem maior, aumentando naturalmente a complexidade.

Uma análise de erros é necessária para selecionar o melhor dos três casos possíveis.

Para computar o erro provável em α^2 nós diferenciamos a equação (3.32)

$$\delta \alpha^2(i) = \left[1 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_i \right]^2 \delta \alpha_0^2 + 2 \alpha_0' \left[1 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_i \right] \delta \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_i$$

onde o valor de α_0 que aparece nesta equação não é o valor inicial que escolhemos para começar a iteração, mas sim o valor que precede o valor final de convergência α^2 . Nós definimos o erro provável em α^2 como a grandeza de $\delta \alpha^2(i)$;

$$\sigma_{\alpha^2} = \left| \delta \alpha^2(i) \right| \simeq 2 \alpha_0' \left| 1 + \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_i \right| \cdot \left| \delta \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_i \right|$$

desde que $\sigma_{\alpha_0^2} \simeq 0$ quando a iteração converge sob o critério estabelecido σ_{α^2} é composto unicamente dos desvios possíveis nas razões

φ_j / φ_k ($j, k = 1, 3, 5$). Agora,

$$\left| \delta \left(\frac{\varphi_j}{\varphi_k} \right) \right| = \left| \frac{\delta \varphi_j}{\varphi_k} - \frac{\varphi_j}{\varphi_k^2} \delta \varphi_k \right| \leq \sqrt{\frac{\varphi_j^2}{\varphi_k^2} (\delta \varphi_j)^2 + \frac{\varphi_j^2}{\varphi_k^4} (\delta \varphi_k)^2}$$

onde

$$\delta \varphi_{j,k} = \left[\varphi_{j,k}^{teor} - \frac{\varphi_{j,k}^{exp}}{Ar} \right]$$

$\varphi_{j,k}^{teor}$ são os momentos do fluxo radial teórico, calculados analiticamente tal que não há erro de truncamento envolvido e $\varphi_{j,k}^{exp}$ são os momentos do fluxo radial experimental calculados que levam ao seguinte resultado:

$$Ar = \frac{(\varphi_j^{teor})^2 (\varphi_k^{exp})^2 + (\varphi_j^{exp})^2 (\varphi_k^{teor})^2}{(\varphi_j^{teor})^2 [\varphi_k^{teor} \varphi_k^{exp}] + (\varphi_k^{teor})^2 [\varphi_j^{teor} \varphi_j^{exp}]} \quad j, k = 1, 3, 5.$$

Os desvios $\delta \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)$ podem ser obtidos por diferenciação

$$\delta \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_1 = \left\{ \frac{\frac{R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R)}{H - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} F} + \frac{F \left[G - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \frac{R}{\alpha_0} J_1'(\alpha_0 R) \right]}{\left[H - \frac{\varphi_3}{\varphi_1} F \right]^2} \right\} \delta \left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1} \right)$$

$$\delta \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_2 = \left\{ \frac{-G}{V - \frac{\varphi_5}{\varphi_3} H} + \frac{H \left[U - \frac{\varphi_5}{\varphi_3} G \right]}{\left[V - \frac{\varphi_5}{\varphi_3} H \right]^2} \right\} \delta \left(\frac{\varphi_5}{\varphi_3} \right)$$

$$\delta \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \right)_3 = \left\{ \frac{-\frac{R}{\alpha_0} J_1(\alpha_0 R)}{V - \frac{\varphi_5}{\varphi_1} F} + \frac{F \left[U - \frac{\varphi_5}{\varphi_1} \frac{R}{\alpha_0} J_1'(\alpha_0 R) \right]}{\left[V - \frac{\varphi_5}{\varphi_1} F \right]^2} \right\} \delta \left(\frac{\varphi_5}{\varphi_1} \right)$$

3.3. O MÉTODO DE AJUSTE POR MÍNIMOS QUADRADOS

O método de ajuste por mínimos quadrados ajusta as atividades medidas que, a menos de uma constante multiplicativa, tem a mesma distribuição do fluxo.

3.3.1. Ajuste axial [8]

Desde que as atividades tenham sido obtidas longe da fonte e das fronteiras, elas se distribuem na direção axial segundo

$$\phi(z) = A \sinh \gamma (H - z) \quad (3.33)$$

onde A é uma constante de normalização, H é a altura extrapolada e γ^2 é o laplaciano axial.

Para a obtenção de A , H e γ tenta-se ajustar as atividades medidas à curva 3.33 pelo método dos mínimos quadrados.

O processo consiste na linearização da expressão do fluxo com relação aos três parâmetros, por meio de um desenvolvimento em série de Taylor:

$$\begin{aligned} \phi(z, A, H, \gamma) = & \phi(z, A_0, H_0, \gamma_0) + (A - A_0) \frac{\partial \phi(z, A, H, \gamma)}{\partial A} \Big|_{A=A_0} + \\ & + (H - H_0) \frac{\partial \phi(z, A, H, \gamma)}{\partial H} \Big|_{H=H_0} + (\gamma - \gamma_0) \frac{\partial \phi(z, A, H, \gamma)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_0} \end{aligned} \quad (3.34)$$

sendo A_0 , H_0 , γ_0 os valores iniciais dos parâmetros a serem determinados.

São tomados como melhores valores de A , H e γ aqueles que minimizam o resíduo

$$(\Delta \phi)^2 = \sum_{i=1}^N w_i (\phi_i^{exp} - \phi_i)^2 \quad (3.35)$$

onde ϕ_i^{exp} é a atividade medida no ponto i ; ϕ_i é a distribuição teórica no mesmo ponto i ; w_i é um peso arbitrariamente escolhido e que, normalmente, se toma como o inverso da variância da atividade medida naquele ponto.

O mínimo de (3.35) é obtido impondo-se

$$\frac{\partial (\Delta \Phi)^2}{\partial A} = \frac{\partial (\Delta \Phi)^2}{\partial H} = \frac{\partial (\Delta \Phi)^2}{\partial \gamma} = 0 \quad (3.36)$$

que nos fornece um sistema de equações algébricas lineares, donde obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A - A_0 \\ \Delta H &= H - H_0 \\ \Delta \gamma &= \gamma - \gamma_0 \end{aligned}$$

Novos valores $A_1 = A + \Delta A$; $H_1 = H + \Delta H$; $\gamma_1 = \gamma + \Delta \gamma$ substituem os originais e o processo continua até que se obtenha

$$\left| \frac{A_i - A_{i-1}}{A_i} \right| < \epsilon_1; \quad \left| \frac{H_j - H_{j-1}}{H_j} \right| < \epsilon_2; \quad \left| \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{\gamma_i} \right| < \epsilon_3$$

onde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ são valores arbitrariamente escolhidos.

Este método é poderoso para a determinação de parâmetros lineares, no caso a constante A. Para parâmetros não lineares como H e γ , obtém-se um sistema de equações algébricas de solução trabalhosa.

Para se contornar esta dificuldade, usa-se o método somente para calcular A e γ , para uma dada altura extrapolada, procedendo-se da seguinte forma:

1. Calcula-se A e γ para gama de valores de H, com um determinado número de pontos e faz-se o gráfico de curva γ^2 em função de H.
2. Repete-se o procedimento 1 desprezando-se, do conjunto de pontos anterior, pontos iniciais e finais, obtendo-se novas curvas γ^2 em função de H.

3. Os melhores valores de γ e H são aqueles que correspondem à intersecção das diferentes curvas.

Partindo-se da equação (3.34) para um dado valor de H e das condições (3.36), determinamos ΔA e ΔH . Os novos valores de A e γ são dados por

$$A = A_0 \left[1 + \frac{A - A_0}{A_0} \right] \quad (3.37)$$

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 + \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \right] \quad (3.38)$$

A estimativa inicial de γ_0 é obtida de (3.30) fazendo-se

$$\phi(z) = A \sinh \gamma (H - z) \approx ce^{-\gamma z} \quad (3.39)$$

tomando-se o logaritmo neperiano:

$$\ln \phi(z) = \ln c - \gamma z \quad (3.40)$$

Desprezando-se do conjunto de dados experimentais iniciais e finais, ajusta-se pelo método dos mínimos quadrados a reta 3.40 cuja inclinação é $-\gamma_0$.

A estimativa de A_0 é feita tomando-se um ponto intermediário do conjunto de dados

$$A_0 = \frac{\phi_{\mu}^{exp}}{\sinh \gamma_0 (H_0 - z_{\mu})} \quad (3.41)$$

Sendo Σt_1 a seção de choque de transporte do moderador e H_0 a altura geométrica, estima-se H_0 .

3.3.2. Ajuste radial [9]

O fluxo térmico na direção radial é dado, a menos de uma constante, pelas atividades A_k , obtidas em N pontos de coordenadas x_k : as variâncias de A_k são σ_k^2 supondo-se nulas as variâncias de x_k .

As atividades devem ser ajustadas à curva $f(p_i, x_k)$ onde p_i são M parâmetros a serem determinados com a condição de ser a função

$$\psi = \sum_{k=1}^N \frac{[A_k - f(p_i, x_k)]^2}{\sigma_k^2} = \text{mínimo} \quad (3.42)$$

Desenvolvendo $f(p_i, x_k)$ em série de Taylor em torno de p_i tem-se

$$f(p_i, x_k) = f(p_i^0, x_k) + \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right)_{p_i} \Delta p_i \quad (3.43)$$

impondo-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_i} = 0$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{[A_k - f(p_i, x_k)]}{\sigma_k^2} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^M \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \right\} \Delta p_i \quad (3.44)$$

A relação (3.44) constitui um sistema de M equações com incógnitas Δp_i .

A qualidade do ajuste é avaliada pela variância estimada da

distribuição:

$$S^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{R=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2} \left[A_R - f(p_i, \alpha_R) \right]^2 \quad (3.45)$$

A distribuição radial do fluxo de neutrons térmicos medido no plano horizontal de cota z_0 pode ser posta na forma

$$\Phi(r) = \sum_{i=1}^M A_i J_0\left(\frac{d_i r}{R}\right) \sinh \gamma_i (H - z_0) \quad (3.46)$$

ou

$$\Phi(r) = \sum_{j=1}^N p_j J_0\left(\frac{d_j r}{R}\right) = f(p_j, r) \quad (3.47)$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = J_0(\alpha_j r) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.48)$$

para $j = M + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^M p_i \frac{d_i r}{R^2} J_1\left(\frac{d_i r}{R}\right) \quad (3.49)$$

Para que as expressões (3.48) e (3.49) possam ser levadas em (3.44) é necessário obter os valores iniciais dos parâmetros.

- a. o raio extrapolado é estimado como o raio do reticulado cilíndrico equivalente.
- b. As amplitudes p_j dos harmônicos se obtêm da seguinte maneira: o fluxo em cada ponto k é dado por

$$A_k = \sum_{i=1}^M p_i J_0 \left(\frac{\partial_i r_k}{R} \right)$$

entrando em (3.47) com o valor estimado de R tem-se um sistema de N equações a M incógnitas. Fazendo-se a combinação linear das N equações

$$\sum_{k=1}^N C_{kj} A_k = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N C_{ki} C_{kj} p_i$$

onde

$$C_{kj} = J_0 \left(\frac{\partial_j r_k}{R} \right) \quad (3.51)$$

obtendo-se um sistema de M equações a M incógnitas que, resolvidas, fornece os valores iniciais dos parâmetros p_i .

4. APRESENTAÇÃO DA SUBCRÍTICA

4.1. DESCRIÇÃO DA URANIE (Fig. 1)

A Uranie é constituída essencialmente de uma base suportada as placas superior e de posicionamento dos elementos combustíveis. A placa superior é de aço, com 5 cm de espessura, e possui 217 furos de 33 mm de diâmetro destinados a receber as barras de Urânio e dispostos segundo um reticulado hexagonal (Fig. 2).

A placa de posicionamento é de Alumínio e de idêntica geometria à placa superior e a ela solidária, assegurando a verticalidade e paralelismo das barras combustíveis.

A altura total do conjunto é de 3,50 m, podendo funcionar com um acelerador tipo "Sames" ou com uma fonte radioativa.

4.2. CARACTERÍSTICAS

Tanque cilíndrico:

material - Lucoflex

dimensões - H = 1300 mm

$\phi = 1000$ mm

Volume de água: 1 m³

Resistividade da água: 2,5 $\mu\Omega$ x cm

Reticulado hexagonal: passo $d_r = 45$ mm

Combustível: densidade - $18,8 \text{ g/cm}^3$
 dimensões - $H = 1000$ mm
 $\phi = 26$ mm

Revestimento: material - Alumínio
 dimensões - $\phi_i = 26,8$ mm
 $\phi_e = 30$ mm

Altura do reticulado: 1000 mm

Razão de volume moderador combustível: 1,96

Massa de Urânio: 1,6 toneladas

Fonte de neutrons Am-Be: intensidade - $4,8 \times 10^6 \text{ n/s}$.

4.3. CANAIS DE MEDIDA

Material - Alumínio

Dimensões - tubos 10 x 12 mm

Existem 19 canais posicionados segundo duas direções perpendiculares, A e J. As perturbações introduzidas na uniformidade do moderador pelo volume de ar presente nestes canais são em grande parte anuladas pela introdução de barras de lucite nos canais não utilizados durante a medida.

4.4. RETICULADO EQUIVALENTE

Para o cálculo teórico, utilizamos a aproximação clássica de Wigner-Zeitzi que consiste em substituir a célula hexagonal por

uma célula cilíndrica de mesmo volume.

O raio r_e da célula equivalente é:

$$r_e = d_r \times \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$$

d_r = passo do reticulado hexagonal

$r_e = 23,6$ mm.

O reticulado hexagonal global é substituído pelo reticulado cilíndrico equivalente, cujo raio se exprime em função do número de barras N do reticulado pela relação:

$$R_g = r_e \times \sqrt{N}$$

$R_g = 301$ mm.

Deve-se notar que esta aproximação pode levar a valores enganosos na determinação da economia de refletor obtido a partir das medidas radiais segundo as duas direções A e J.

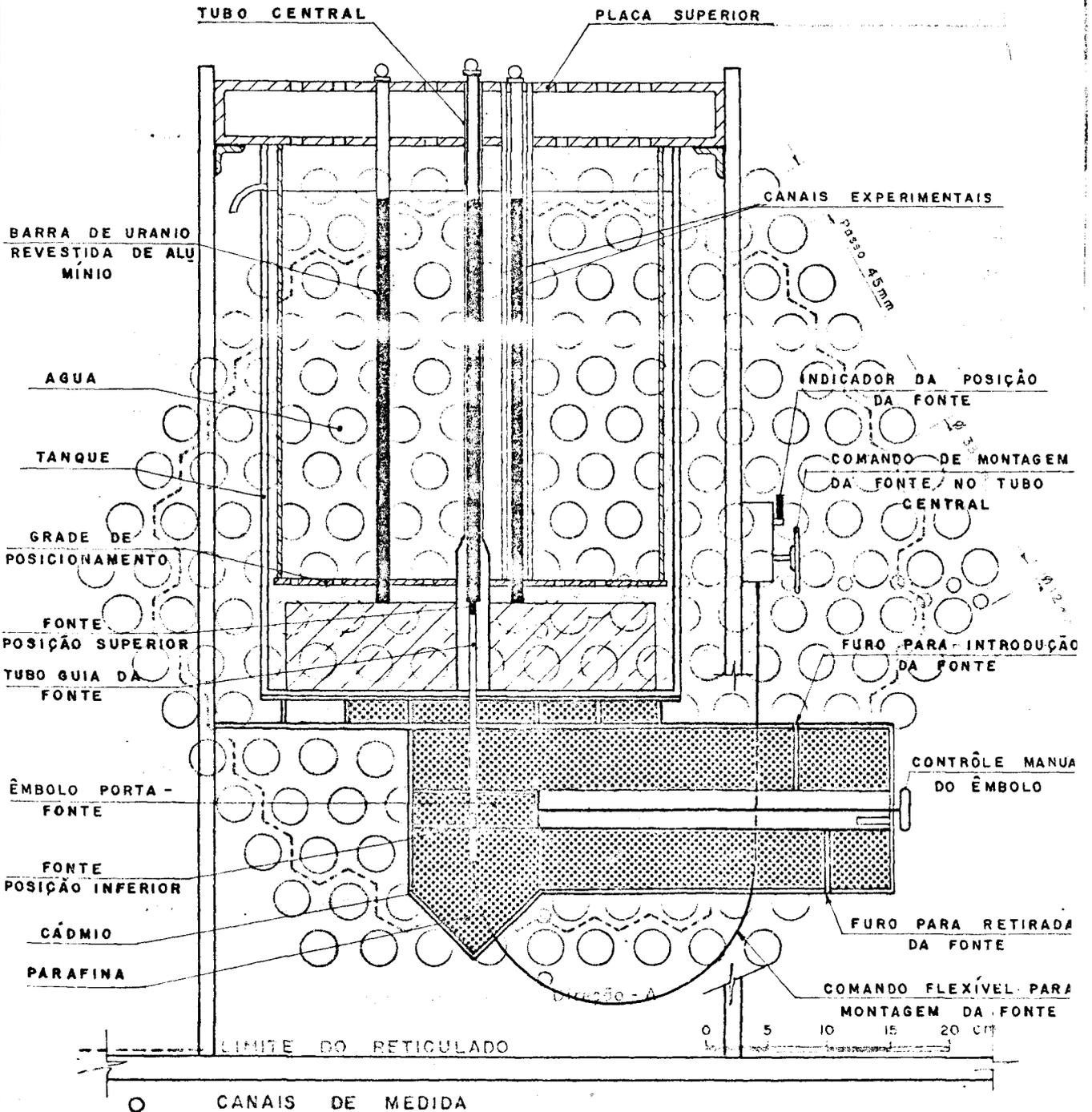
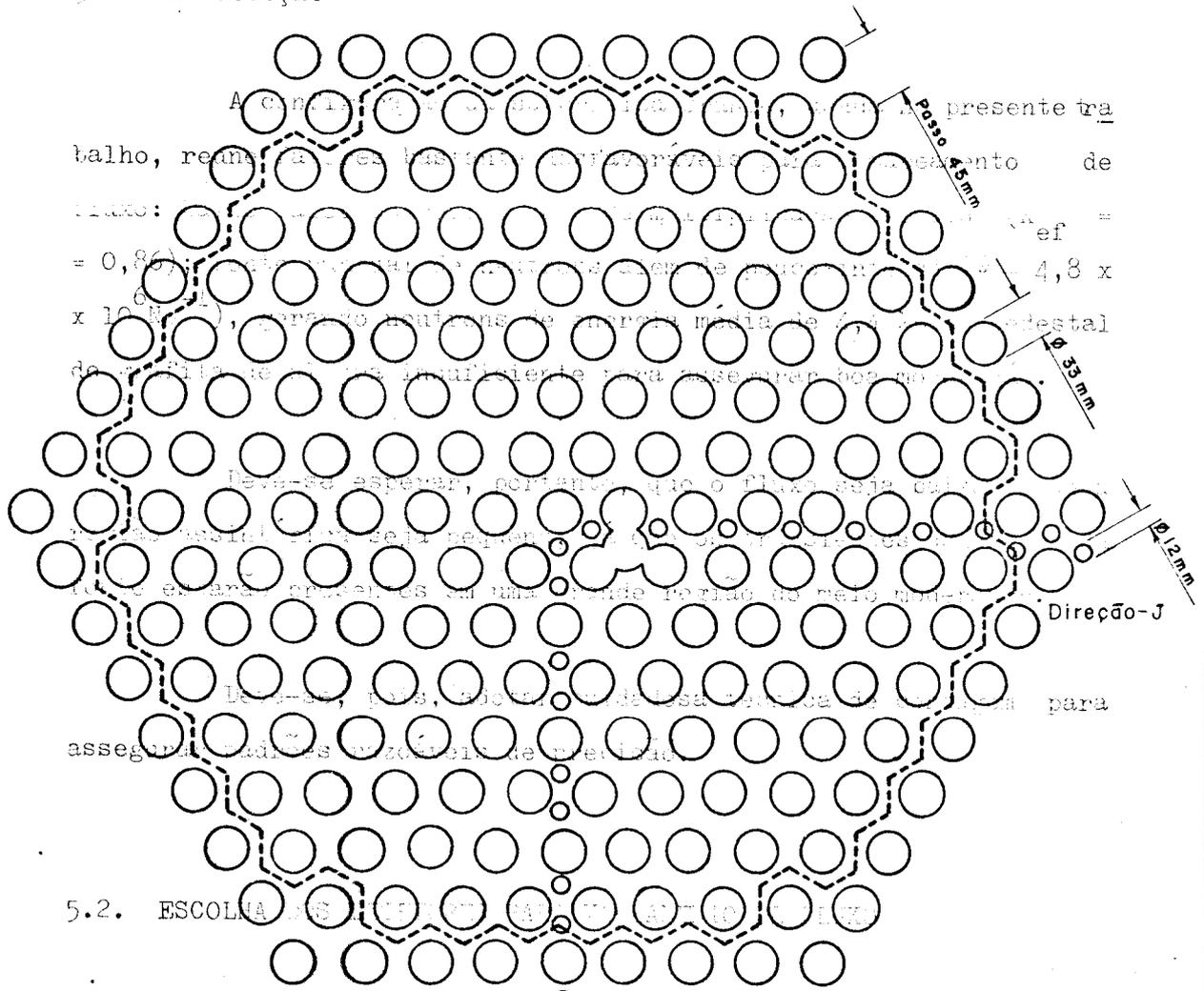


Diagrama de um núcleo de reator nuclear, mostrando a disposição dos canais experimentais, a barra de urânio revestida de alumínio, a água, o tanque, a grade de posicionamento, a fonte de posição superior, o tubo guia da fonte, o êmbolo porta-fonte, a fonte de posição inferior, o cádmio, a parafina, o controle manual do êmbolo, o furo para introdução da fonte, o furo para retirada da fonte, o comando flexível para montagem da fonte, o limite do reticulado e os canais de medida.

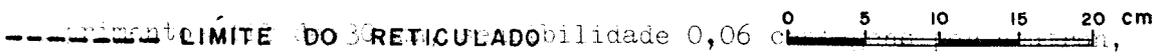
5. TÉCNICAS EXPERIMENTAIS

5.1. INTRODUÇÃO



5.2. ESCOLHA

Dispúnhamos de tubos B.P. (diâmetro de 10 mm, com



por cm²) e de detetores de ativação. Dentre os detetores usuais de

ativação, o Indio é aquele que apresenta melhores características

para o caso presente. No entanto, como se demonstrará posteriormen-

5. TÉCNICAS EXPERIMENTAIS

5.1. INTRODUÇÃO

A configuração da subcrítica Uranie, usada no presente trabalho, reúne fatores bastante desfavoráveis para o mapeamento de fluxo: baixo valor do coeficiente de multiplicação efetivo ($K_{ef} = 0,86$); fonte puntual de neutrons além de pouco intensa ($Q = 4,8 \times 10^6 \text{Ns}^{-1}$), gerando neutrons de energia média de 4,4 Mev; pedestal de grafita de altura insuficiente para assegurar boa moderação.

Deve-se esperar, portanto, que o fluxo seja baixo e que a região assintótica seja pequena, já que os transientes de energia da fonte estarão presentes em uma grande região do meio moderador.

Deve-se, pois, adotar cuidadosa técnica de contagem para assegurar padrões razoáveis de precisão.

5.2. ESCOLHA DOS DETETORES PARA MAPEAMENTO DE FLUXO

Dispúnhamos de tubos BF₃ miniatura (diâmetro de 10 mm, comprimento útil de 30 mm, sensibilidade 0,06 contagens por neutron, por cm²) e de detetores de ativação. Dentre os detetores usuais de ativação, o Índio é aquele que apresenta melhores características para o caso presente. No entanto, como se demonstrará posteriormen-

te, a precisão calculada para as medidas por ativação é pior do que aquelas obtidas com tubo BF₃. O uso do Índio se restringiu à determinação da razão de Cádmiu, com o fim de estudar os transientes de energia. Os detetores utilizados eram retangulares com área de 1 cm² e espessura de 200 mg/cm² montados em um suporte de Alumí- nio. As caixas de Cádmiu eram de 0,8 mm de espessura. Os mesmos de- tetores eram usados para irradiação, sob Cádmiu e a descoberto, em cada posição, evitando-se assim o problema de se medir a massa do Índio.

5.3. PRECISÃO DAS MEDIDAS

a. Tubos BF₃

Realizamos 5 a 6 medidas em cada posição, totalizando 10 000 contagens. O levantamento axial de fluxo térmico foi feito com dois detetores simultaneamente nos limites de 20 a 100 cm com espaçamento de 4 em 4 cm, totalizando 20 pontos. O levantamento ra- dial foi feito nas cotas de 20, 25, 30, 35, 40, 50, 60 e 70 cm. A precisão estatística experimental esteve, em geral, melhor que a cal- culada e em torno de 1%. A comparação do desvio experimental com o calculado permitiu acompanhar o comportamento do equipamento de con- tagem.

b. Detetores de Índio

Adotou-se o esquema clássico de irradiação e contagem. Os detetores foram irradiados por um tempo nunca inferior a 7 horas e a contagem se iniciava 10 minutos após a retirada da posição de ir-

radiação. Durante este tempo decaem as meias vidas curtas (72 segundos para o In^{114} e 13 segundos para o In^{116}). A contagem do In^{166m} (meia vida de 54 minutos) era anotada cada 10 minutos para acompanhamento do "Decay".

O equipamento de contagem compreende um tubo GM, com tubo de guarda, sistema anticoincidência, "scaler" e fontes de alta tensão (PHILLIPS).

O tempo de contagem foi fixado a partir das considerações seguintes:

A contagem total registrada no intervalo de tempo t_1 a t , devida à amostra é:

$$N^* = \int_{t_1}^t C dt = \int_{t_1}^t C_0 e^{-\lambda t} dt \quad (5.1)$$

sendo C_0 a taxa de contagem no instante zero (final de irradiação). Daí se obtém:

$$C_0 = \frac{\lambda N^*}{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t}} \quad (5.2)$$

Sendo N a contagem devida à amostra e ao "background".

$$N^* = N - b(t - t_1) \quad (5.3)$$

onde b é a taxa de background.

Comparando (2) e (3) temos:

$$C_0 = \frac{\lambda}{e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t}} (N - b \Delta t) = k(t) (N - b \Delta t)$$

$$\Delta t = t - t_1 \quad \text{tempo de contagem}$$

e

$$\sigma_{C_0}^2 = \left(\frac{\partial C_0}{\partial N} \sigma_N \right)^2 + \left(\frac{\partial C_0}{\partial b} \sigma_b \right)^2$$

ou

$$\sigma_{C_0}^2 = k^2 [\sigma_N^2 + \Delta t^2 \sigma_b^2]$$

Como o tempo de contagem é da ordem da meia vida do isótopo, tem-se (Friedlander) [10].

$$\sigma_N^2 = N (1 - \epsilon + \epsilon e^{-\lambda t}) = N \cdot f(\epsilon, t)$$

onde ϵ é a eficiência do equipamento de contagem.

Como

$$N = \frac{C_0}{k} + b \Delta t$$

$$\sigma_{C_0}^2 = k^2 \left[\left(\frac{C_0}{k} + b \Delta t \right) f(\epsilon, t) + \Delta t^2 \sigma_b^2 \right]$$

Quanto ao "background", vale observar que o mesmo se compõe do "background" ambiente e da atividade residual da amostra, conseqüente à formação do $\text{In}^{114\text{m}}$ de meia vida 49 dias. Decompondo-se o "background" nestas contribuições resulta:

$$\sigma_b^2 = \sigma_a^2 + \sigma_i^2$$

O "background" ambiente é muito bem medido. Cada dia se inicia pela contagem do "background" durante tempo não inferior a 60 minutos.

Assim, pode-se considerar para cada série de medidas (5 dias)

$$\sigma_a^2 = \frac{b}{t_b} < \frac{1 \text{ cpm}}{300}$$

sendo $b = 1$ cpm a taxa de contagem do "background" ambiente, no sistema de contagem β disponível.

A atividade residual, observada no dia seguinte ao da contagem, é medida durante 60 minutos e seu valor típico oscila em torno de 0,5 cpm, assim:

$$\sigma_r^2 = \frac{0.5}{60}$$

o que dá:

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{50}$$

Finalmente, obtém-se para σ_{CO}^2

$$\sigma_{CO}^2 = k^2 \left[\left(\frac{C_0}{k} + b \Delta t \right) f(\delta, t) + \Delta t^2 (\sigma_a^2 + \sigma_r^2) \right]$$

e para o desvio relativo

$$\frac{\sigma_{C_0}}{C_0} = \frac{k}{C_0} \left[\left(\frac{C_0}{k} + b \Delta t \right) f(C, t) + \Delta t^2 b^2 \right]^{1/2}$$

Observa-se, portanto, que a precisão da contagem varia com o tempo. O gráfico da figura 1 mostra que as curvas de $\frac{\sigma_{C_0}}{C_0}$ para diversos valores de C_0 , em função do tempo da contagem.

Observa-se que o desvio relativo decresce rapidamente e se estabiliza em um valor dependente de C_0 . O gráfico permite escolher o tempo de contagem como um compromisso entre a precisão e o tempo disponível para uma série de contagens. No presente trabalho, tomou-se o tempo de 60 minutos, obtendo-se os desvios relativos de 0,3%, 0,6%, 1,6% para C_0 respectivamente igual a 500, 100 e 20 pcm

5.4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

a. Razão de Cádmi

O gráfico nº 2 mostra a distribuição da razão de Cádmi na direção axial, a partir da cota 10 (30 cm acima do plano da fonte). A distribuição radial está no gráfico nº 3.

b. Distribuição axial do fluxo térmico

O gráfico nº 4 mostra a distribuição axial do fluxo térmico medido com tubo BF3, no raio 18,2 cm, que corresponde aproximada

mente ao nó do 2º harmônico de distribuição radial.

Os gráficos de nºs 5 a 11 mostram a distribuição axial de fluxo para os demais raios.

c. Distribuição radial do fluxo térmico

Os gráficos nºs 12 a 19 mostram a distribuição radial de fluxo térmico visto pelo BF3.

5.5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

a. Razão de Cádmió

As contagens típicas obtidas foram da ordem de 80 cpm para as amostras descobertas e de 20 cpm para as amostras sob Cádmió. De acordo com a curva de precisão da figura 1, os desvios relativos são da ordem de 0,6% e 1,6% respectivamente para amostras a descoberto e sob Cádmió. Para a razão de Cádmió resulta:

$$\frac{\sigma_{rc}}{R_{cd}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{A \text{ descoberto}}}{A \text{ descoberto}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{A_{cd}}}{A_{cd}}\right)^2} \approx 1.7\%$$

$$R_{cd} = \frac{A_{desc}}{A_{cd}}$$

Podemos concluir daí que a razão de Cádmió resulta ser constante entre $z = 30$ e 80 cm. Quanto à distribuição radial, os

desvios experimentais superam os desvios calculados e não se pode afirmar que a razão de Cádmio seja constante.

b. Fluxo térmico com detetores de Índio

Deduzindo-se a atividade térmica de saturação A_{th} da atividade total, A_t obtém-se:

$$A_{th} = \frac{R_{cd} - 1}{R_{cd}} A_t$$

$$\sigma_{A_{th}} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\sigma_{R_{cd}}}{R_{cd}}\right)^2 \times \left(\frac{\sigma_{A_t}}{A_t}\right)^2} \approx 2.5\%$$

O fluxo térmico se obtém da atividade específica de saturação

$$\phi_{th} \propto \frac{A_{th}}{m}$$

Observa-se que a medida do fluxo térmico em uma posição com detetor de Índio requer 2 irradiações, 4 contagens de atividade residual, totalizando 6 horas de contagem. Havendo, no mínimo, 100 pontos, onde medir o fluxo, o uso de Índio requereria 600 horas de contagem. Além disso, a precisão calculada é pior que para as medidas com BF₃. Por esta razão foi abandonado o mapeamento de fluxo com detetores de Índio.

c. Fluxo térmico com BF₃

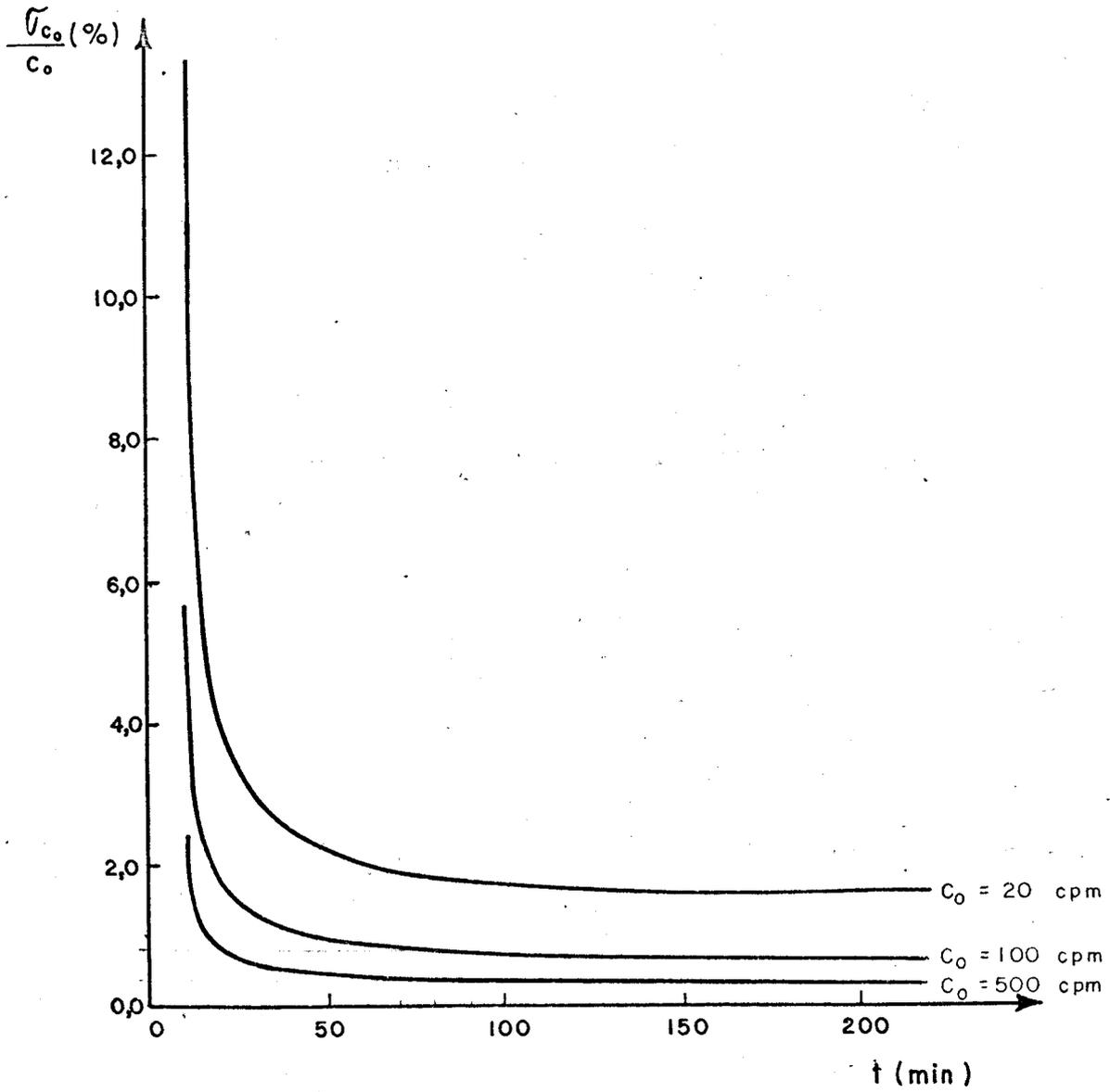
A razão de Cádmio para BF₃ foi medida por Barre [3], na

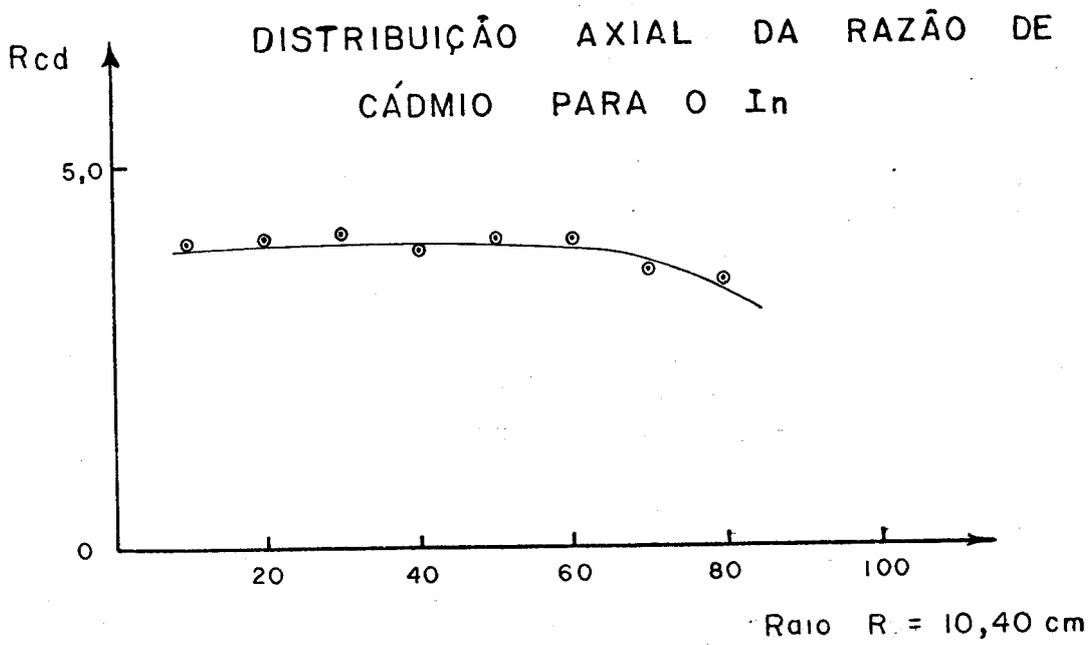
Uranie, e é da ordem de 15 e, praticamente, não varia na região útil.

No nosso caso particular, tais medidas são de difícil execução, pois o diâmetro do tubo porta-detetor é pouco superior à do tubo BF₃, não comportando, conseqüentemente, a espessura adicional de uma jaqueta de Cádmio. Resulta o valor da razão de Cádmio que a contribuição do fluxo epitérmico na resposta do BF₃ é de apenas 6% do total e é constante. Assim, pode-se tomar a resposta do BF₃ como proporcional ao fluxo térmico na região compreendida entre 30 e 70 cm e os raios de 5,2 a 20,80 (gráficos da distribuição da razão de Cádmio).

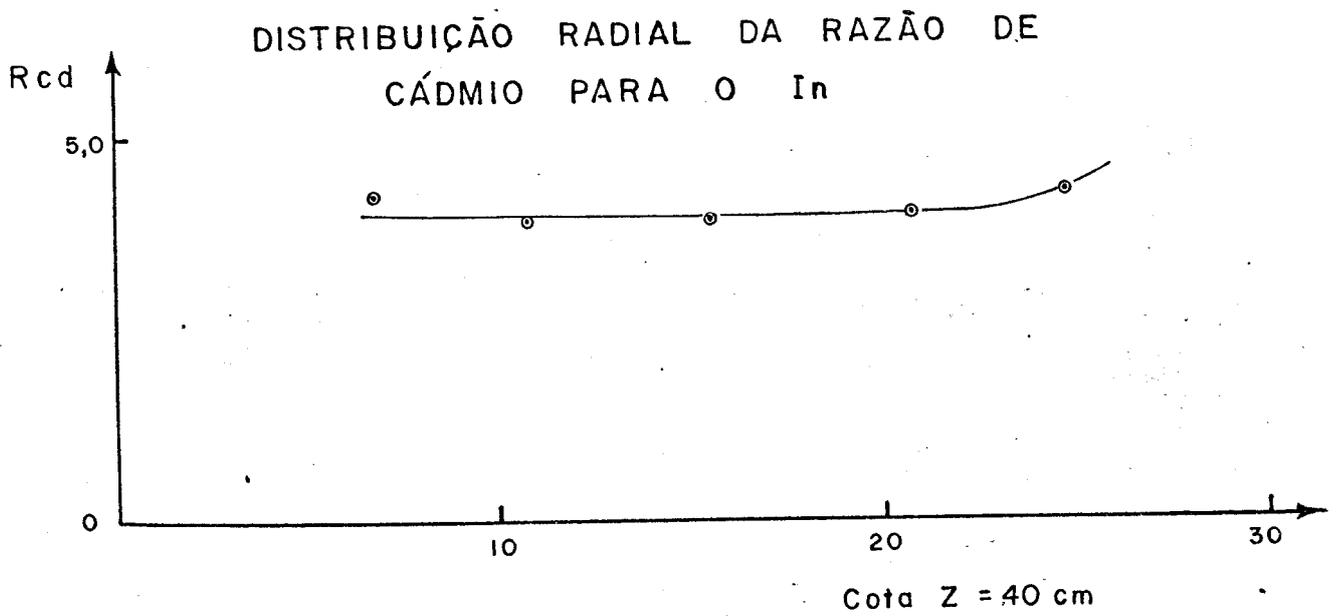
As medidas com BF₃ acusaram desvios padrões experimentais da ordem de 1%.

DESVIO PADRÃO RELATIVO DA TAXA
DE CONTAGEM DE In^{116m}





(FIG - 2)



(FIG - 3)

DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO $R = 18,20$

Log. da Atividade

20

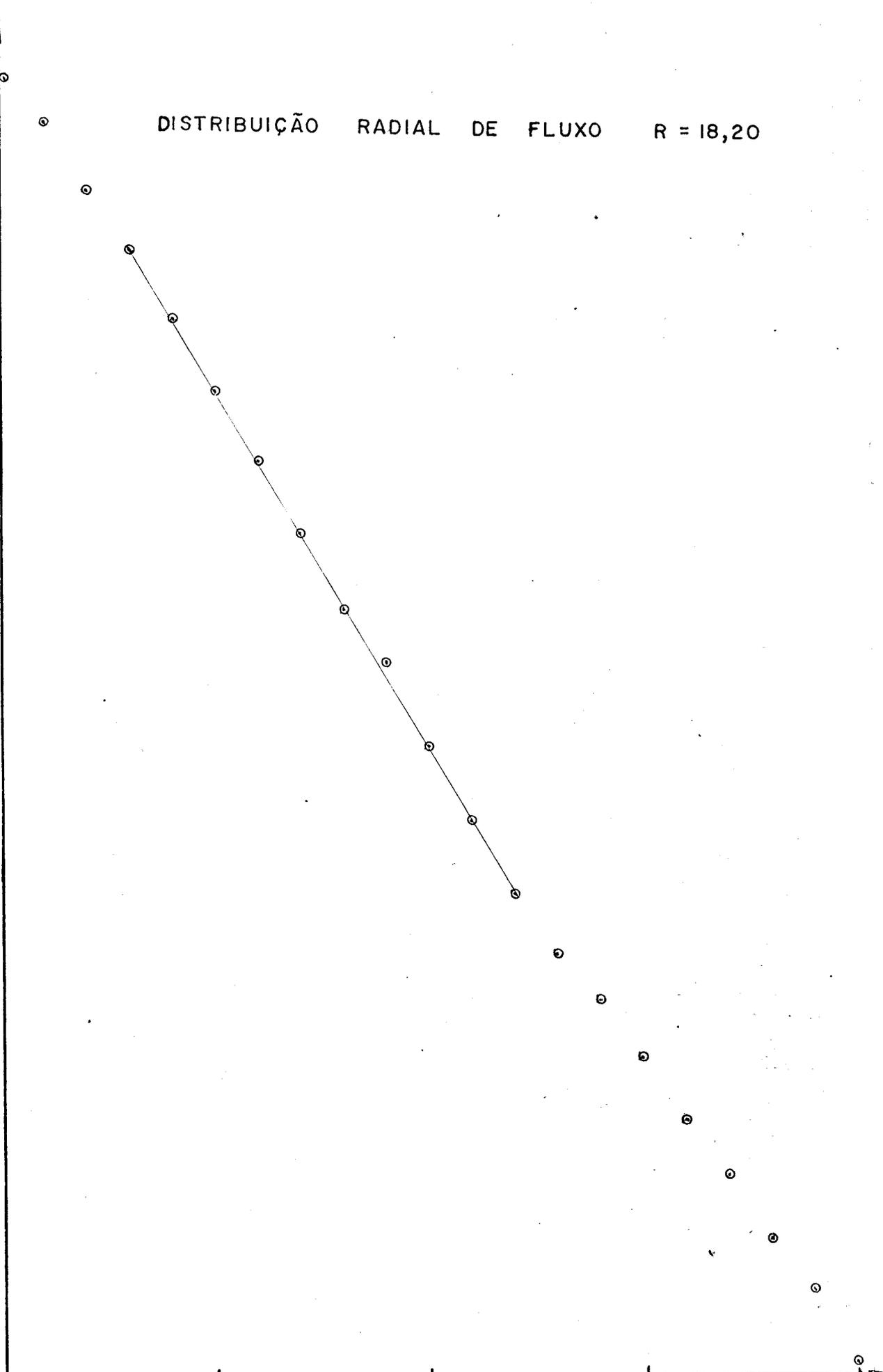
40

60

80

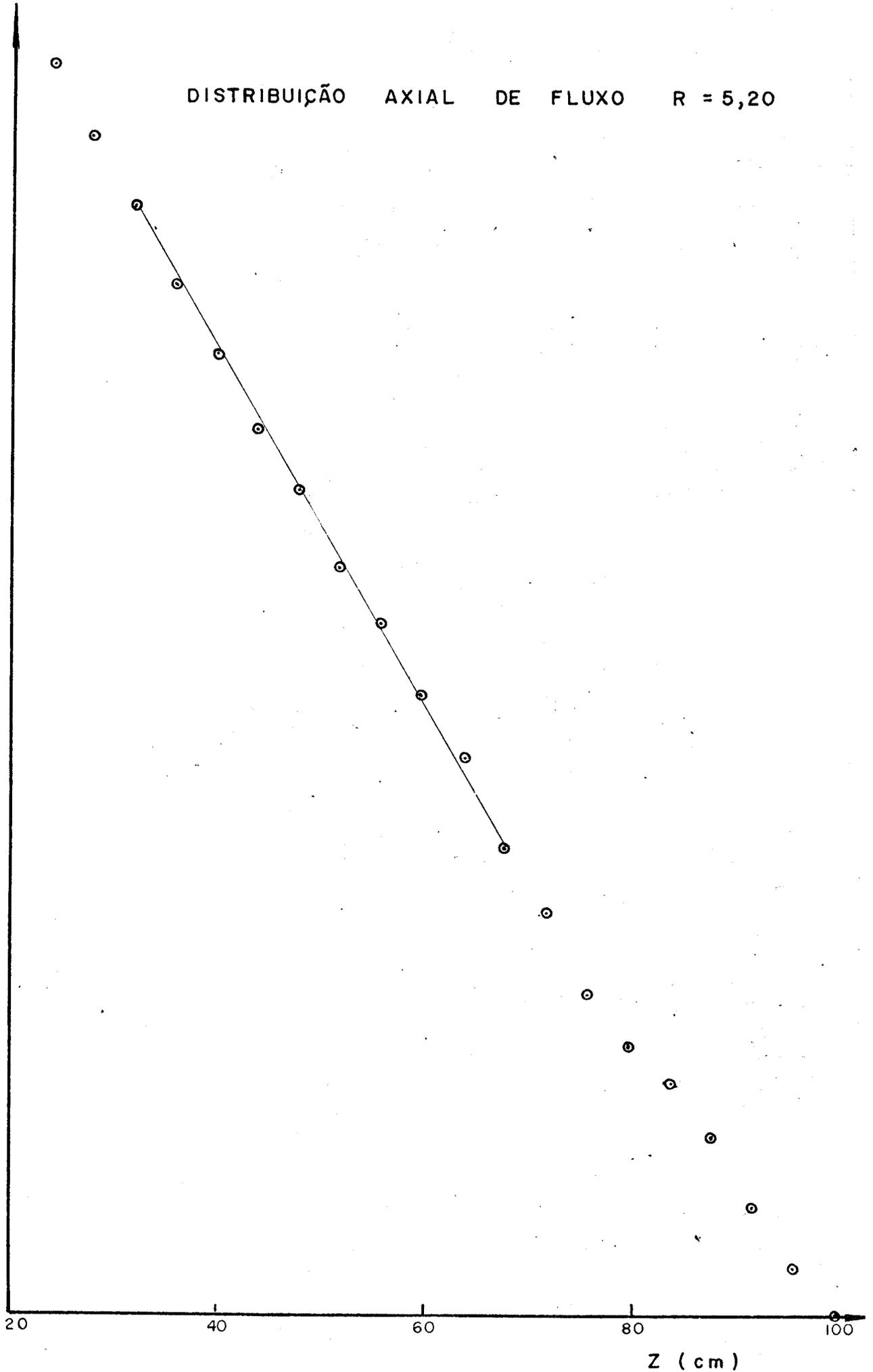
100

r (cm)



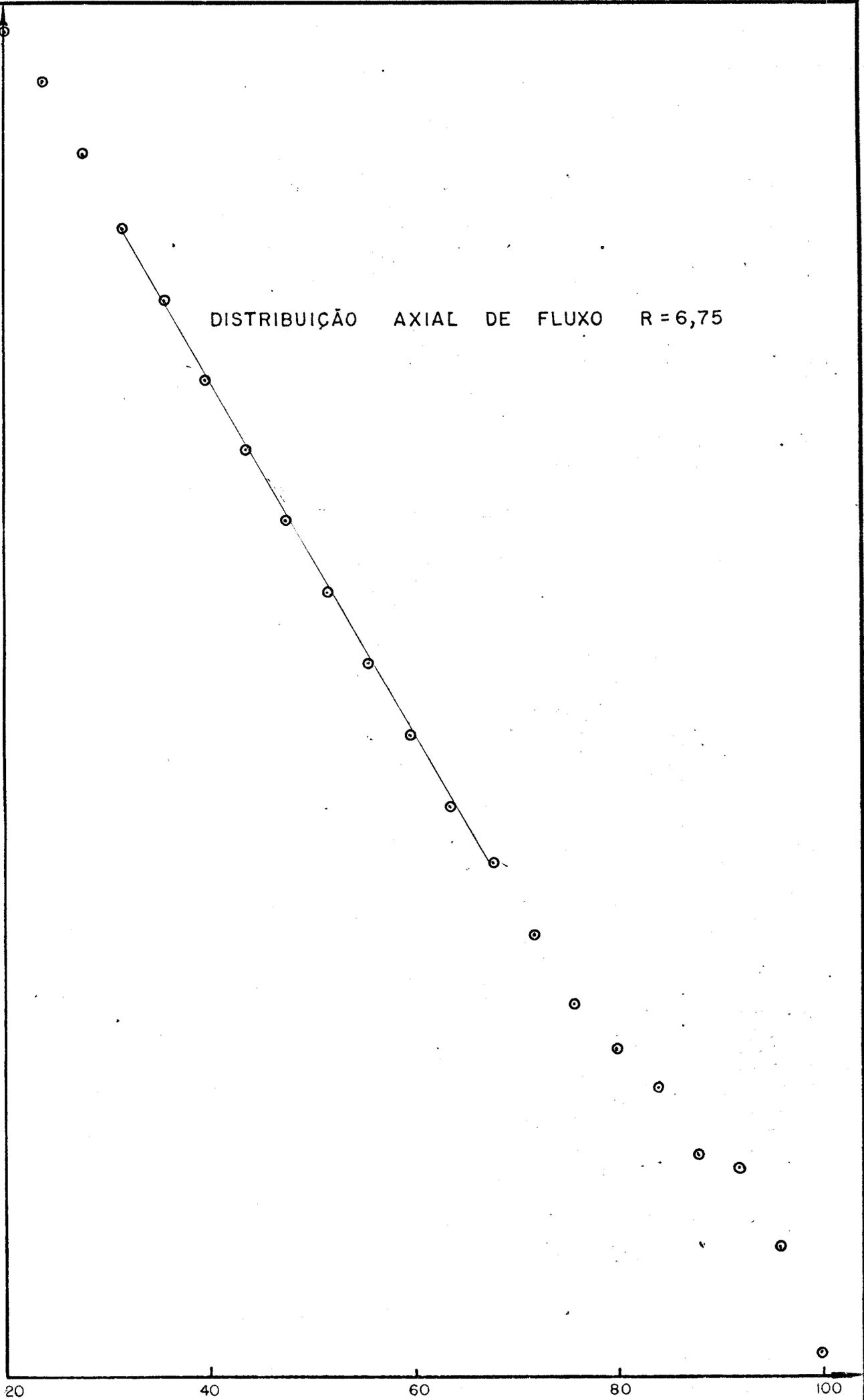
DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R = 5,20

Log da Atividade

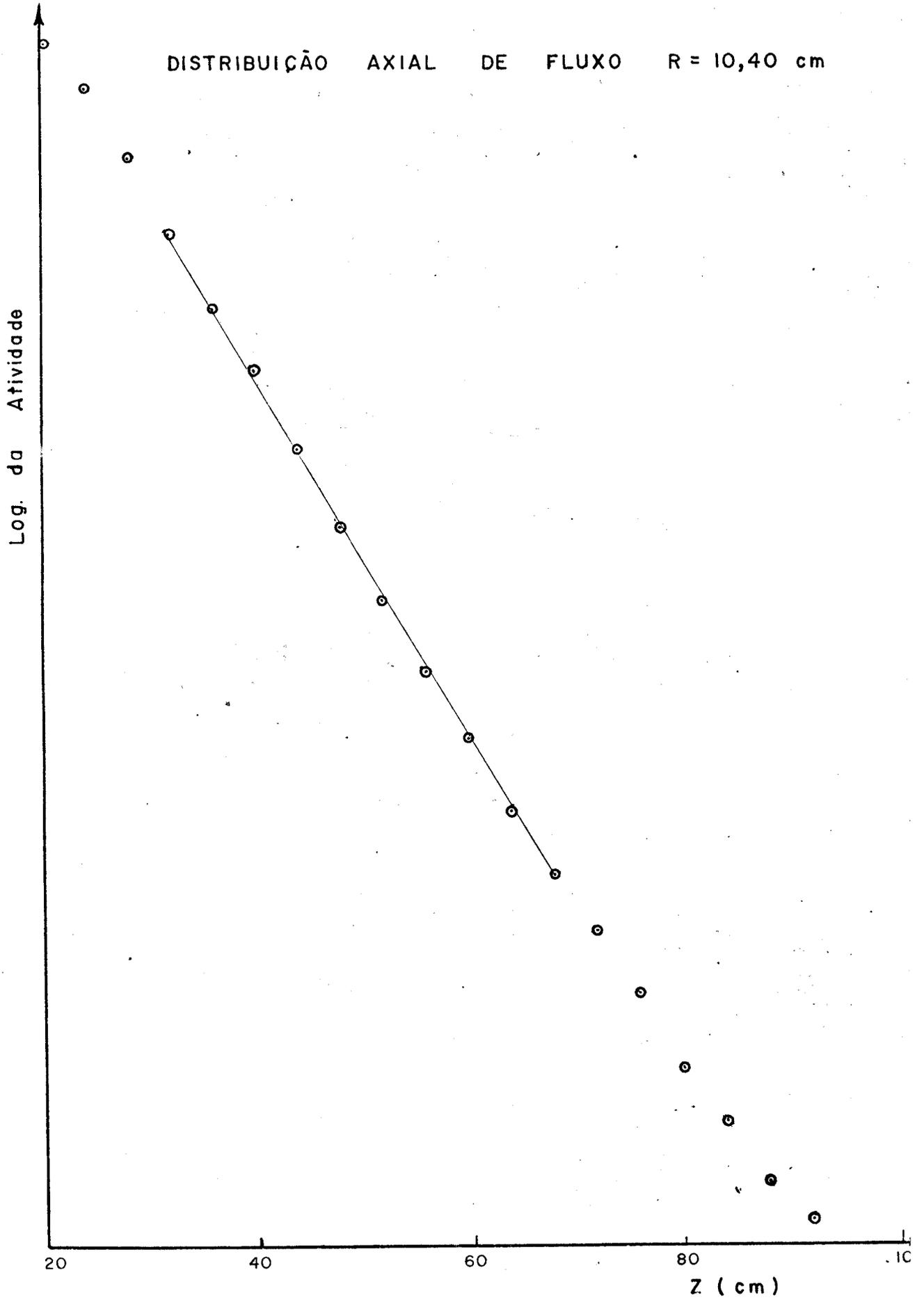


LOG. DE ATIVIDADE

DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R=6,75



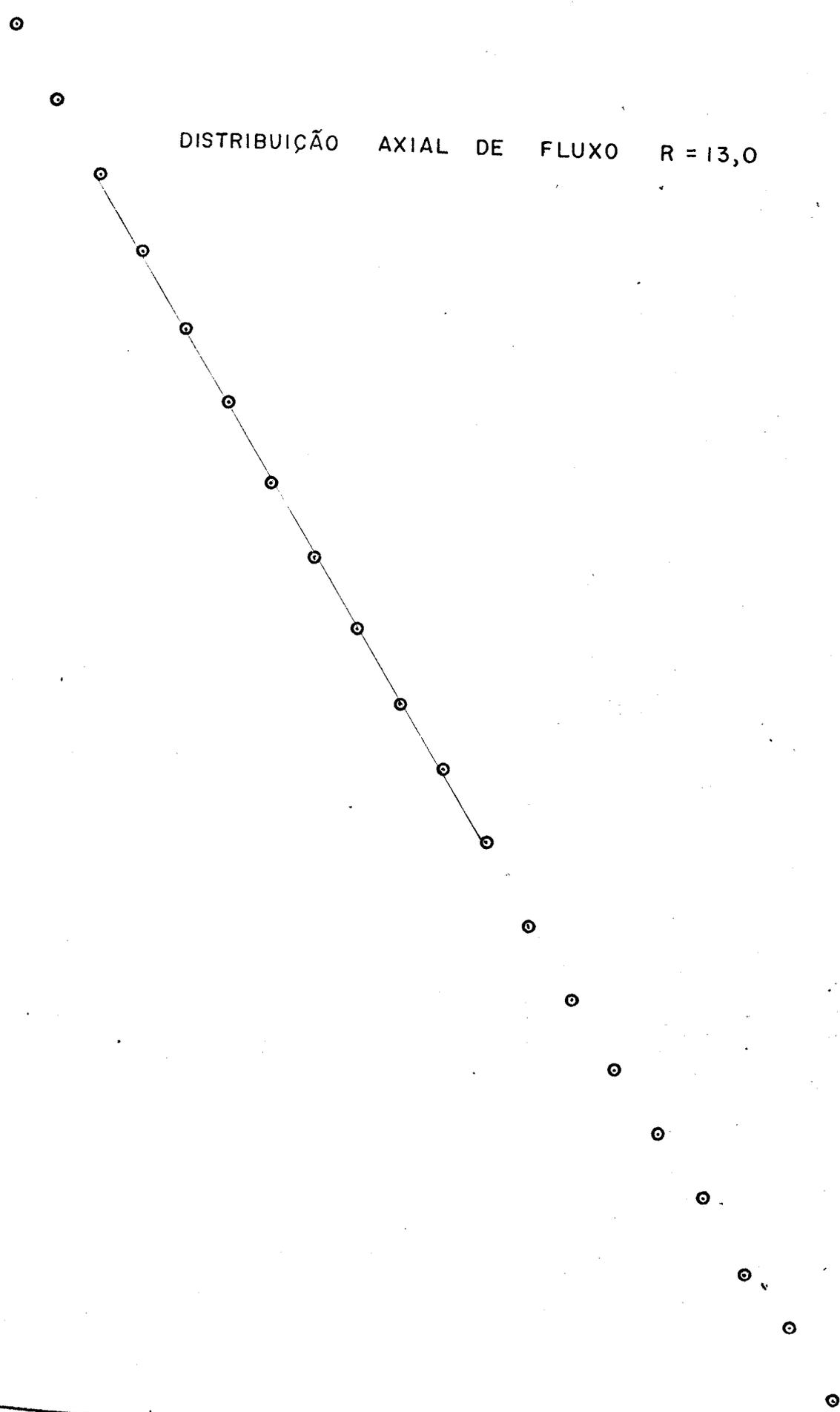
DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R = 10,40 cm



DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R = 13,0

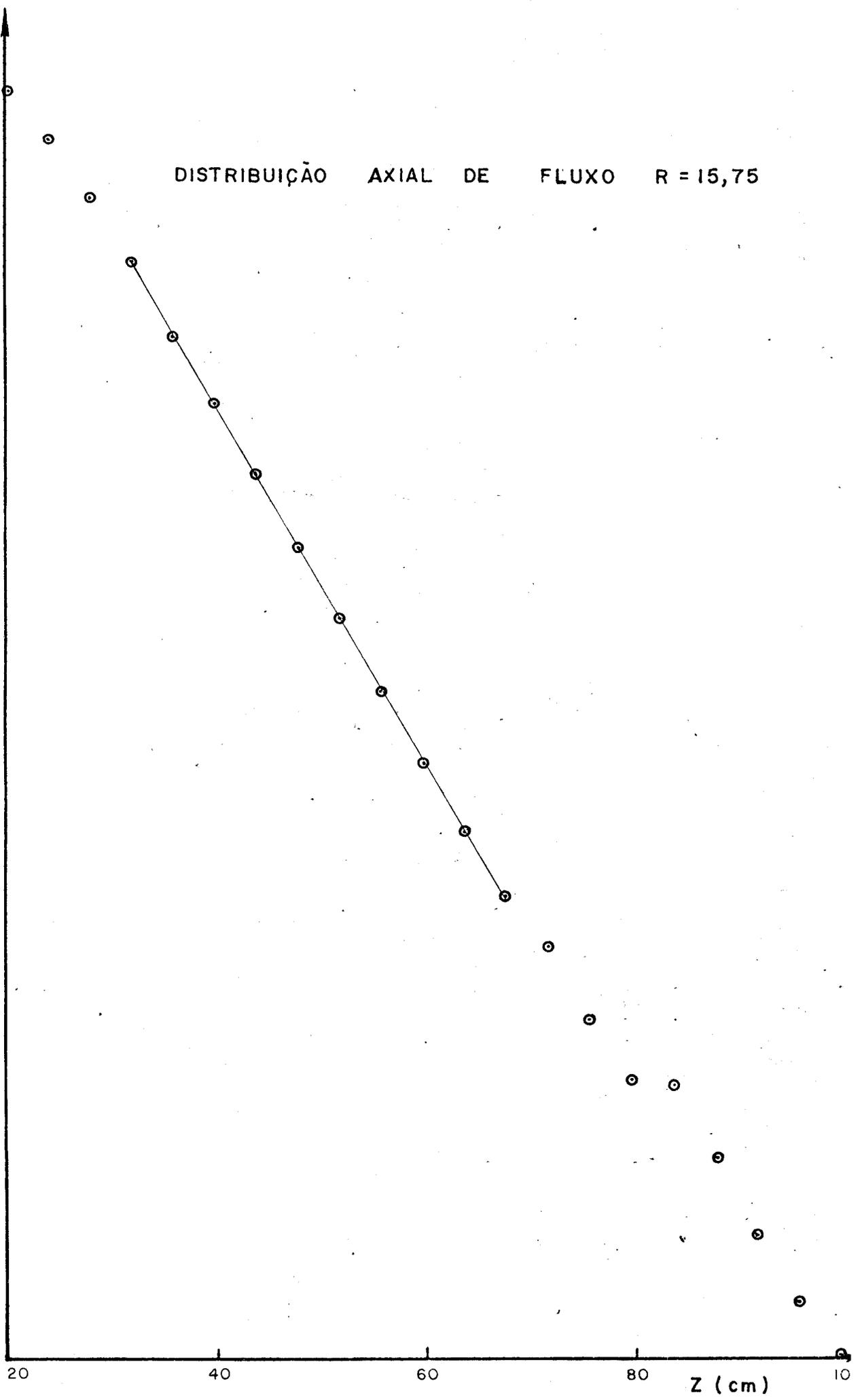
Log. da Atividade

40 60 80



DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R = 15,75

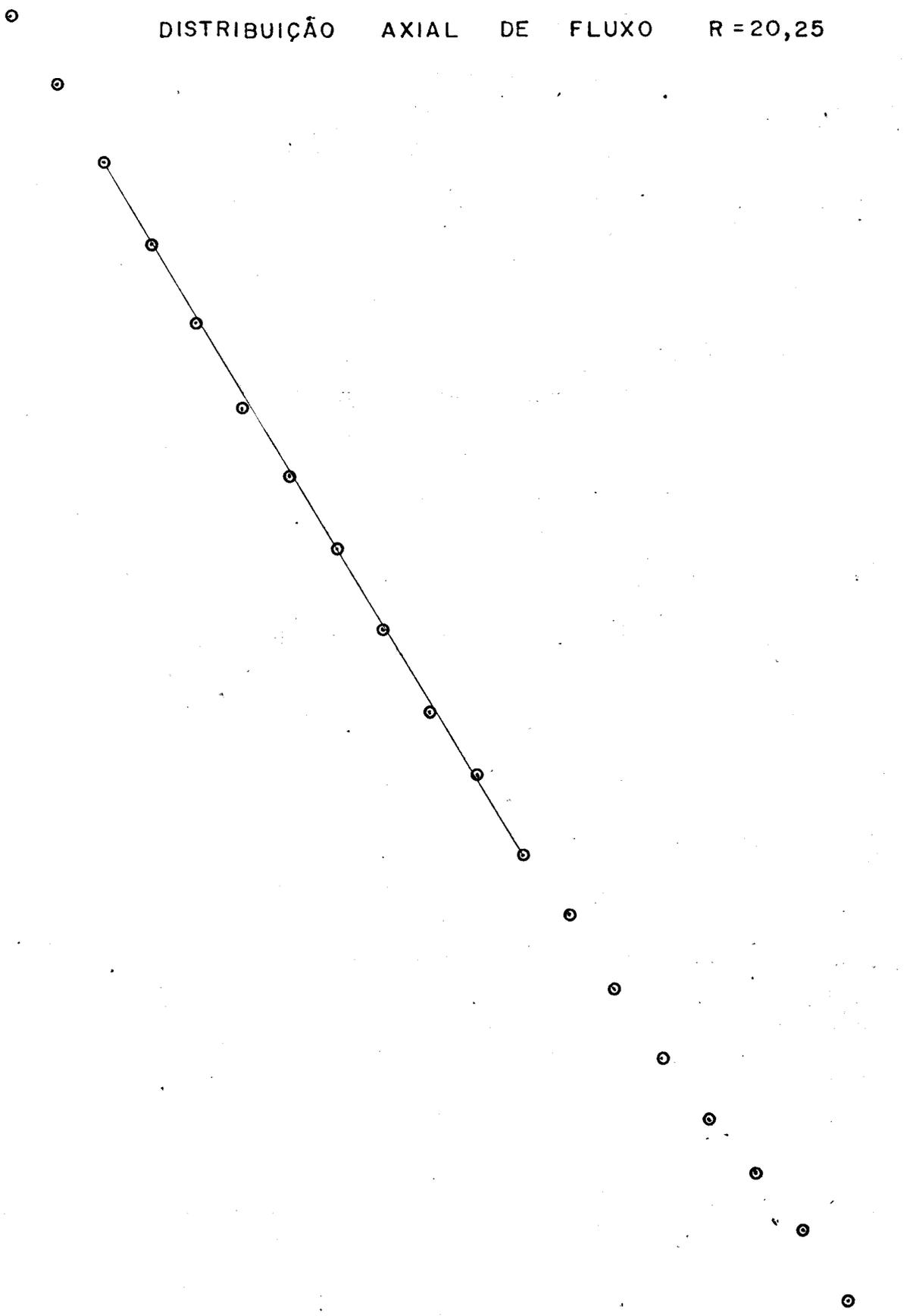
Log. da Atividade



DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R = 20,25

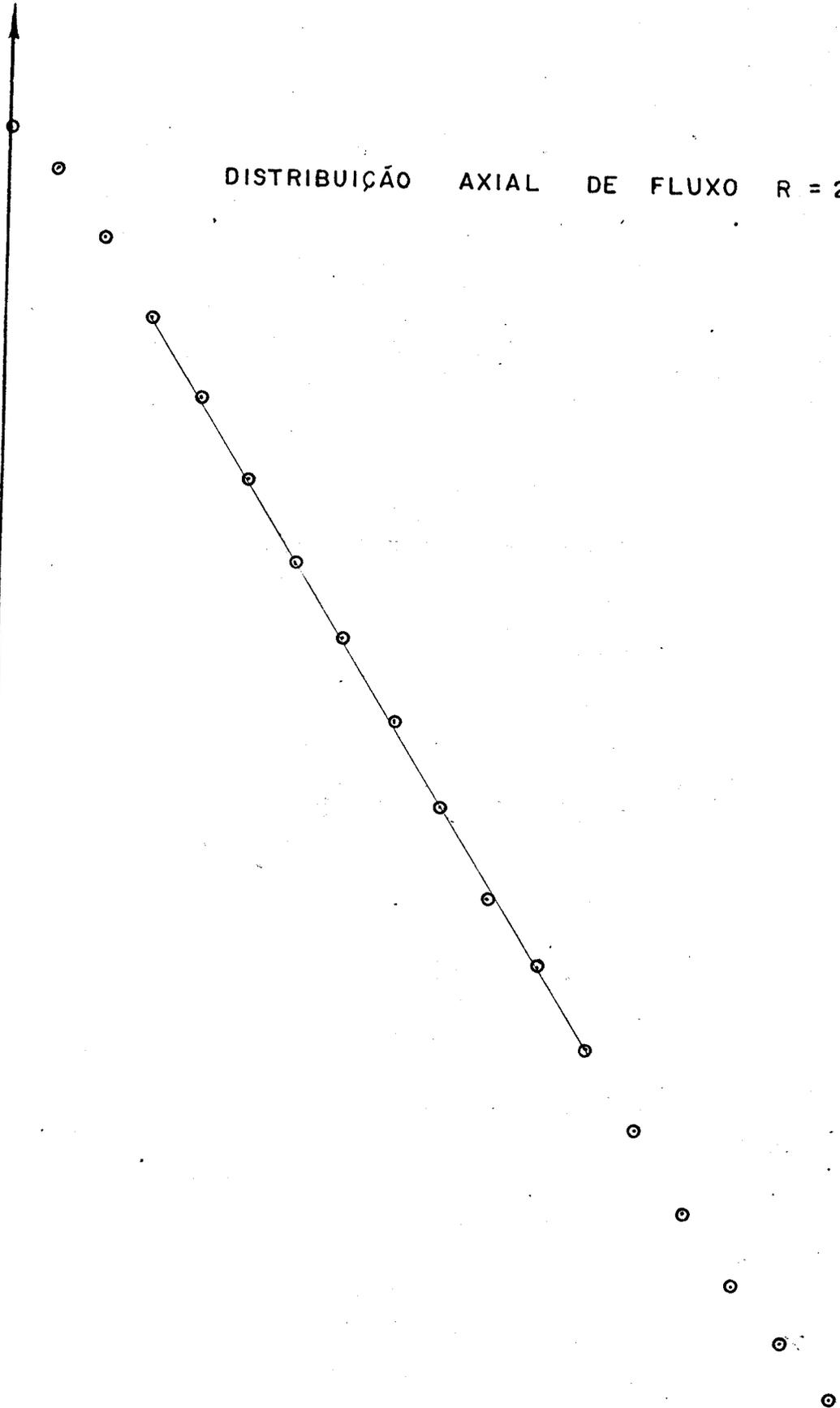
Log. da Atividade

20 40 60 80 100

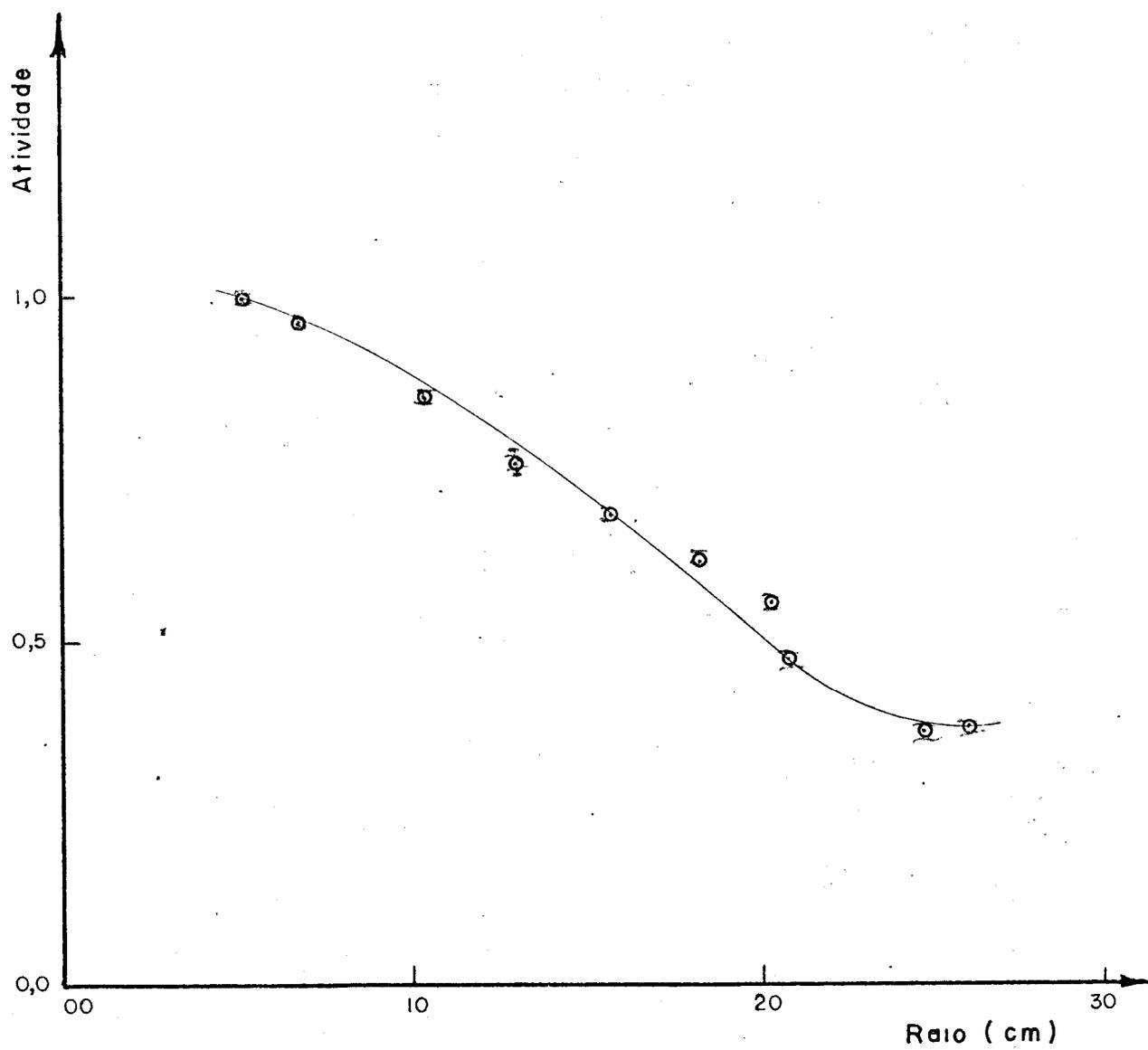


DISTRIBUIÇÃO AXIAL DE FLUXO R = 20,80

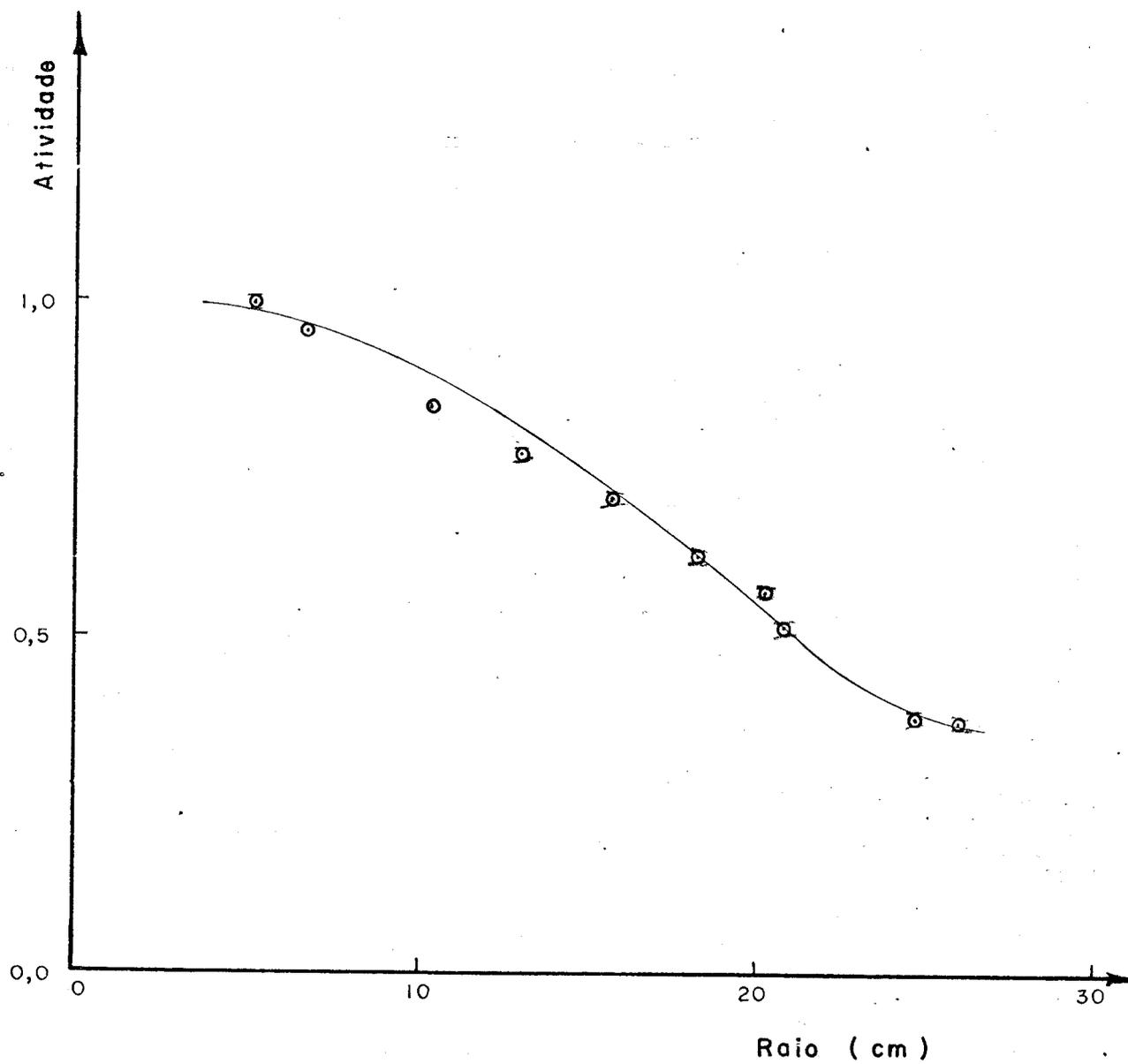
Log. da Atividade



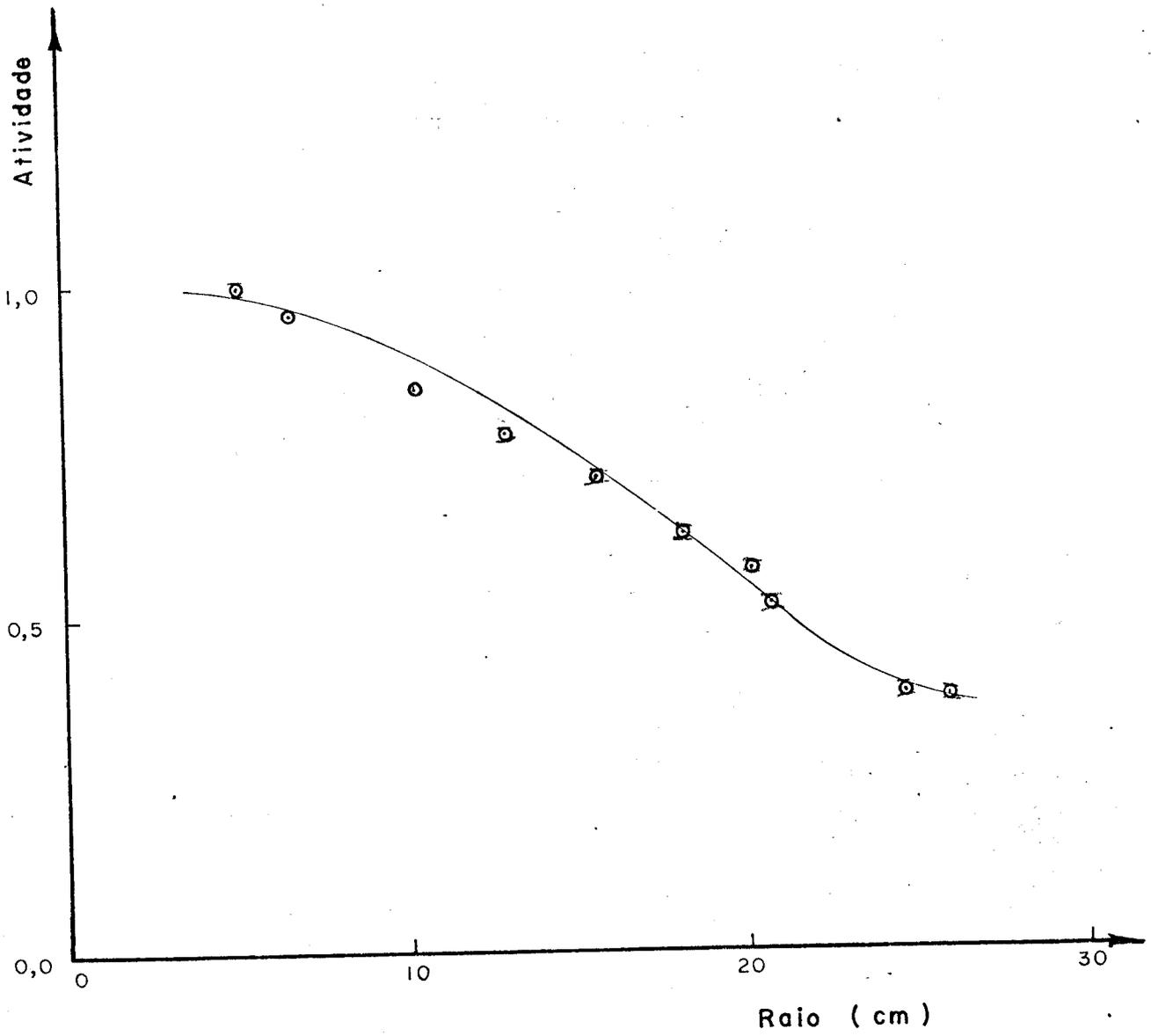
DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 25 cm



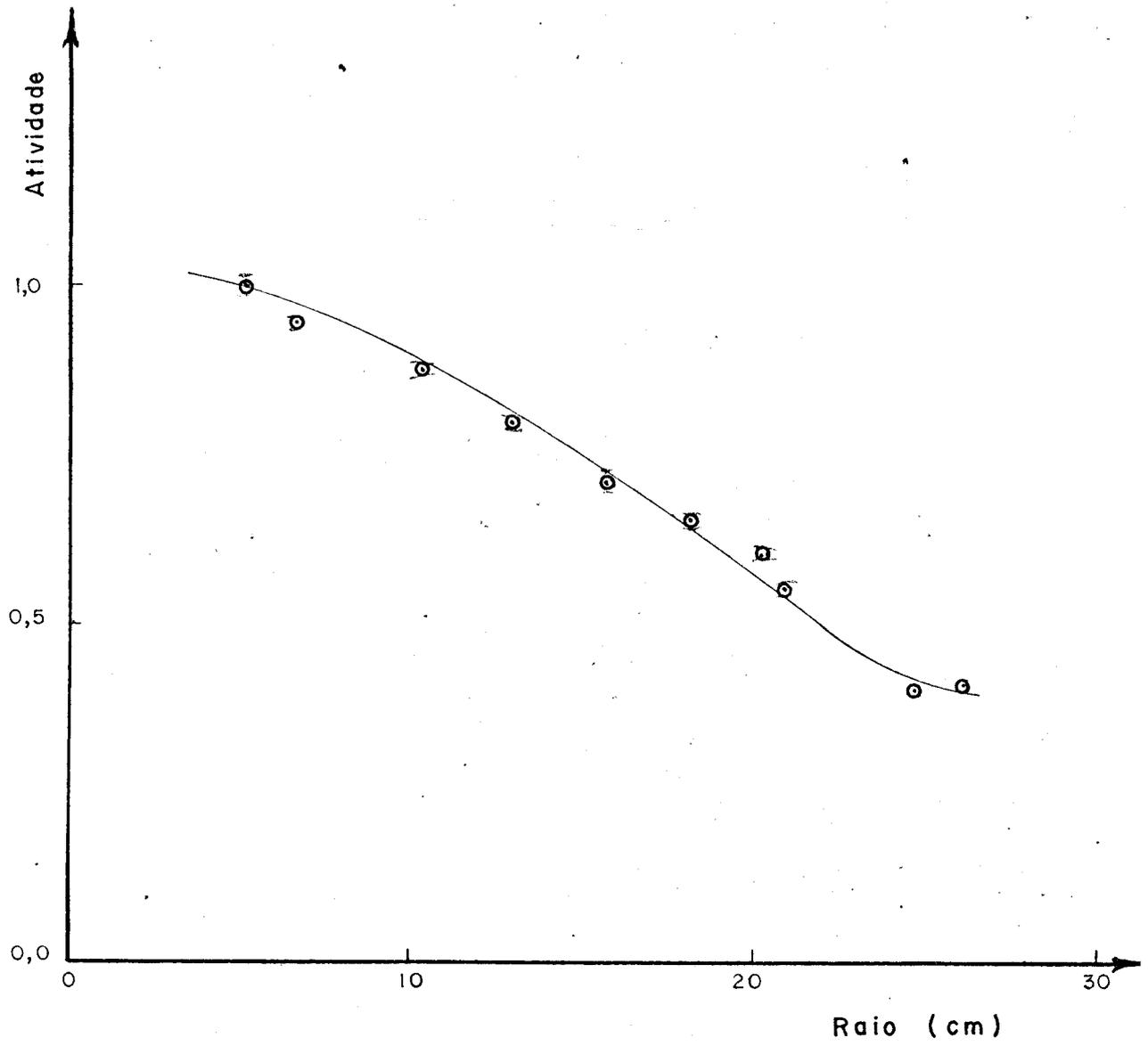
DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 30 cm



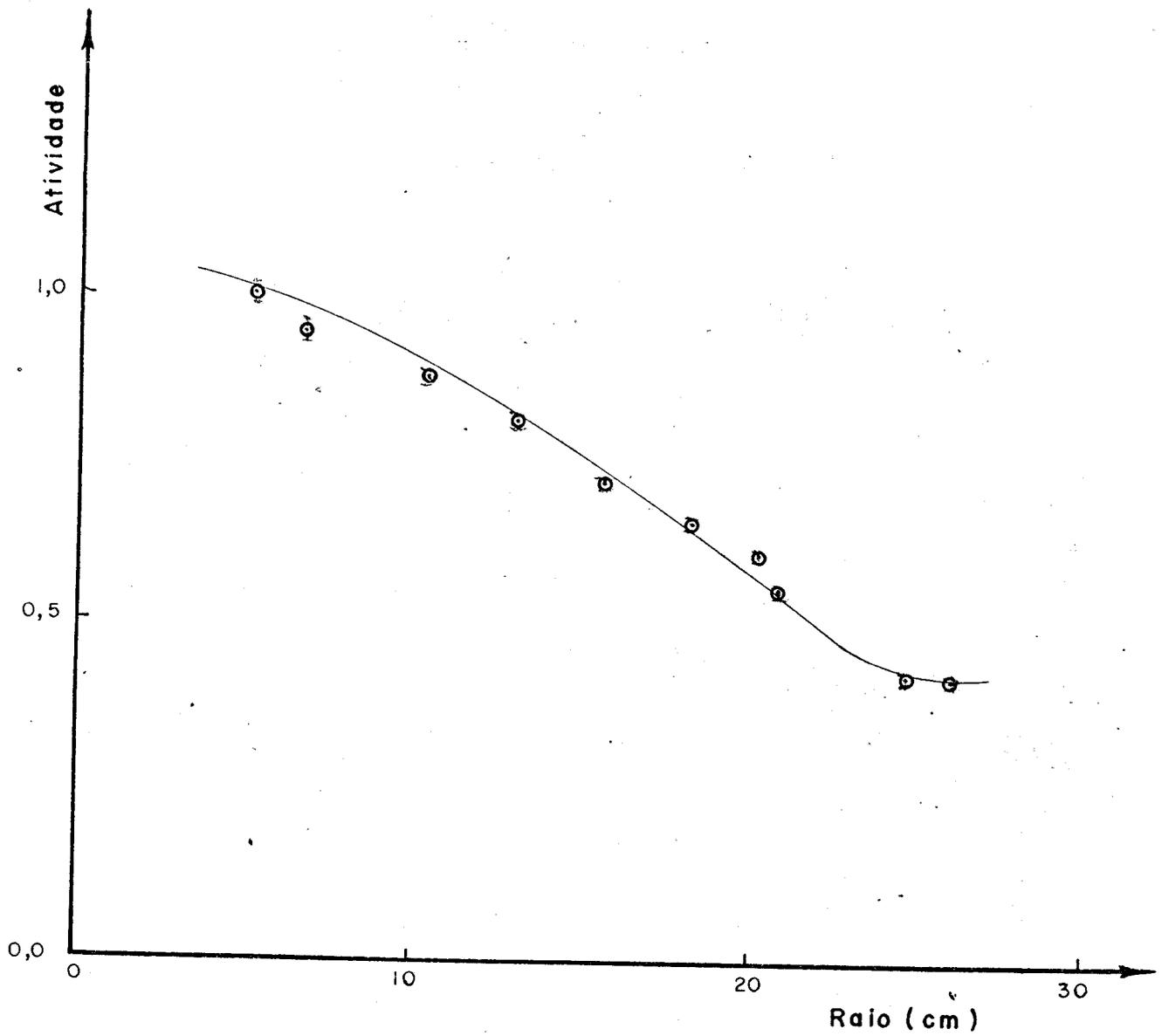
DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 30 cm



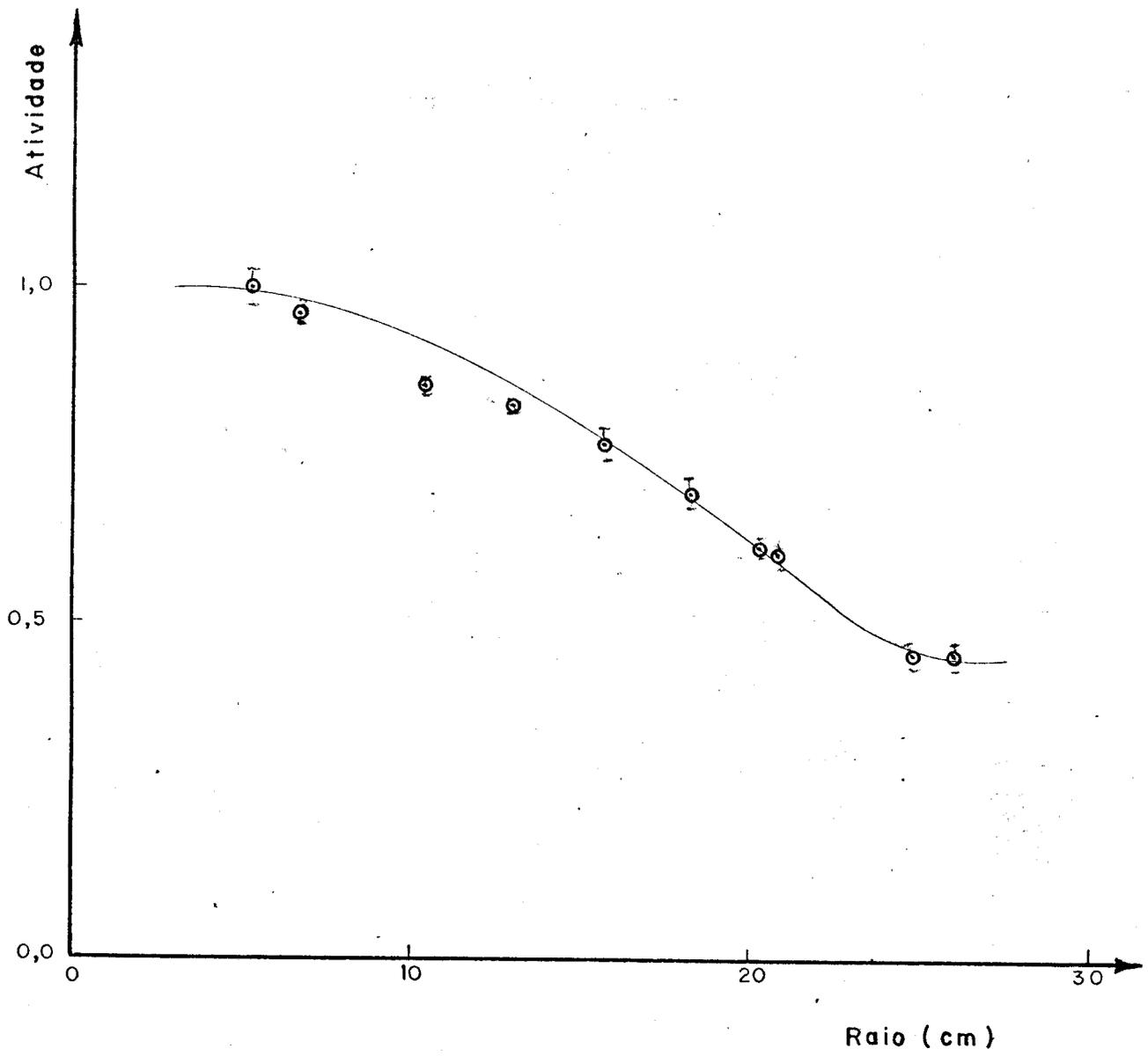
DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 35 cm



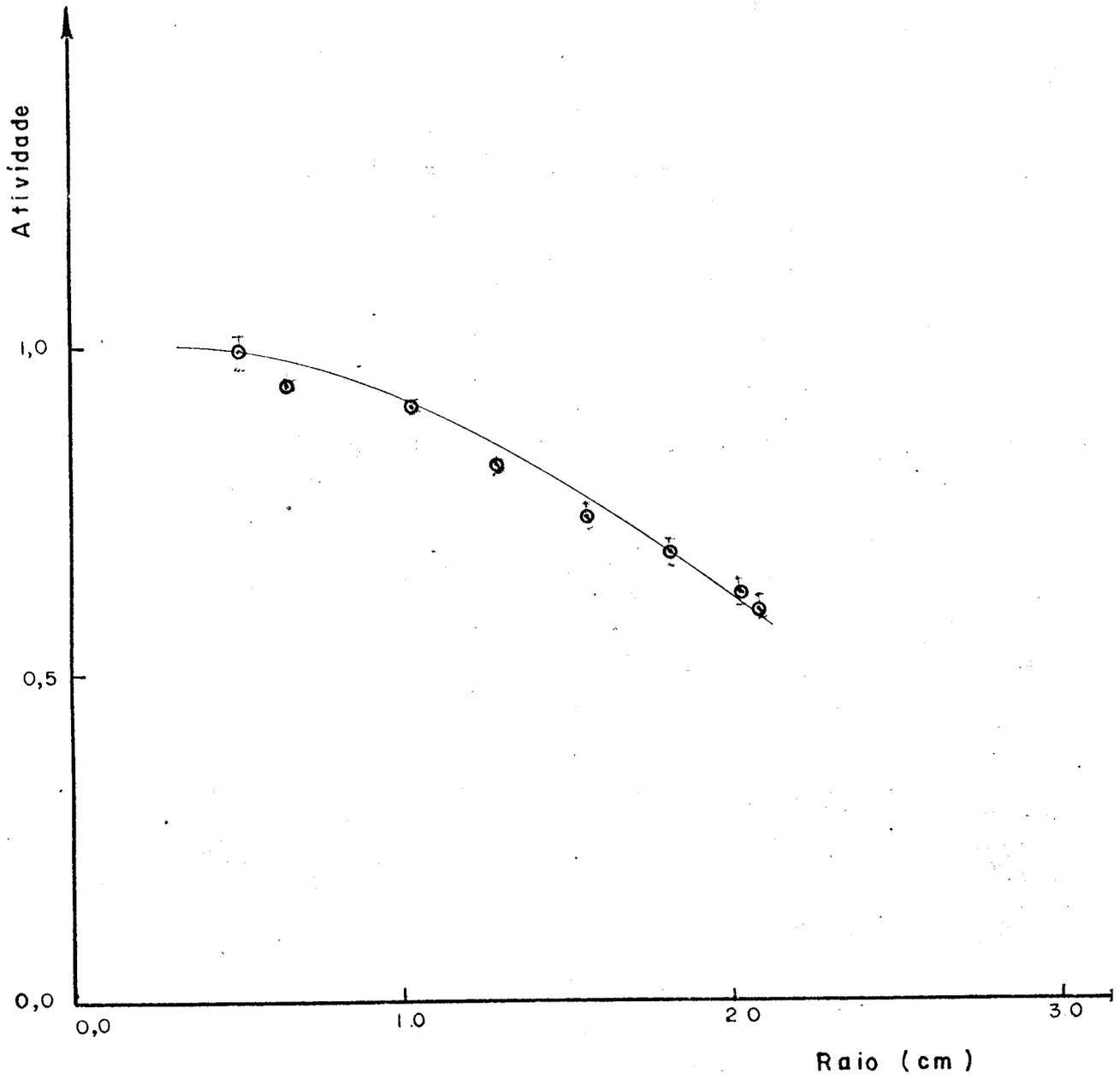
DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 40 cm



DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 50 cm

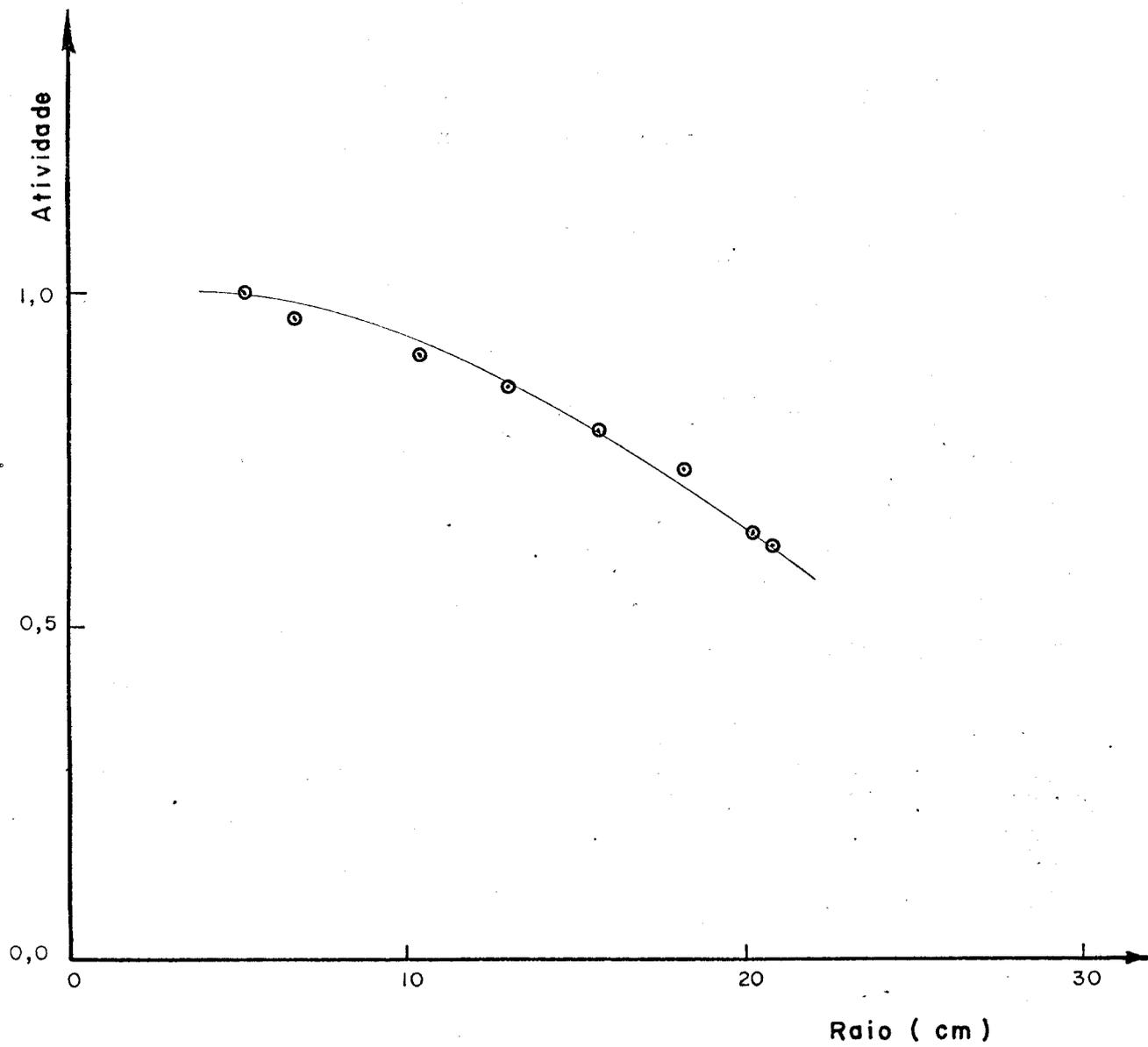


DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 60



(FIG - 18)

DISTRIBUIÇÃO RADIAL DE FLUXO Z = 70 cm



(FIG - 19)

6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

6.1. INTRODUÇÃO

Utilizamos, em nossos cálculos para o laplaciano material, o computador IBM-360/40.

O programa de cálculo do laplaciano radial por mínimos quadrados foi desenvolvido por Leonardo Marcio Vilela, enquanto que o de cálculo por momentos foi desenvolvido pelo MIT [4].

Este último requereu apenas uma modificação no processo de determinação dos momentos, devido ao fato de utilizar, para integração, a regra de Simpson para intervalos iguais que não se aplica ao nosso caso particular.

O programa de cálculo do laplaciano axial foi desenvolvido por nós e consiste no ajuste, por mínimos quadrados, dos logaritmos das atividades medidas, restringindo-se, portanto, à região assintótica.

6.2. LAPLACIANO RADIAL

Mostramos no quadro 1, pelos dois métodos utilizados, a variação do laplaciano radial em função da cota do plano de medida. Nos restringimos à região livre da influência dos harmônicos de es-

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Q U A D R O 1

	MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS				MÉTODO DOS MOMENTOS			
	R (cm)	ΔR	$\alpha^2 \times 10^4$ (cm ⁻²)	$\Delta \alpha^2 \times 10^5$	R (cm)	ΔR	$\alpha^2 \times 10^4$ (cm ⁻²)	$\Delta \alpha^2 \times 10^5$
30	33,8	- 2,3	50,6	60	37,1	0,6	42,0	12
35	35,3	- 0,8	46,4	18	38,5	0,8	39,1	17
40	35,4	- 0,7	46,2	16	37,5	0,1	41,1	3
50	37,1	1,0	42,1	- 25	37,7	0,0	40,6	2
60	36,6	0,5	43,3	- 13	37,1	- 0,6	41,9	11
70	38,5	2,4	39,1	- 55	38,0	0,3	40,1	7
R = 36,1 ± 1,2 cm					R = 37,7 ± 0,4 cm			
$\alpha^2 = (44,6 \pm 3,1) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$					$\alpha^2 = (40,8 \pm 0,9) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$			

paço e da fonte, ou seja, $30 \text{ cm} < z < 70 \text{ cm}$ |11|. Mostramos ainda a variação do raio extrapolado em função da cota do plano de medida. Os resultados do quadro 2 evidenciam claramente a superioridade do método dos momentos sobre o dos mínimos quadrados, notadamente quando se tem um número reduzido de pontos.

Barre |3|, com um reticulado dodecagonal com 199 barras, encontrou uma variação de 7,4% no valor do raio extrapolado.

Nossos resultados conduzem a uma variação de 3,3% em R_e quando calculado pelo método dos mínimos quadrados, e de 1,1% quando calculado pelo método dos momentos.

O valor do laplaciano radial determinado pelo método dos mínimos quadrados $(44,6 \pm 3,1) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$ mostrou um erro 6,9%.

O valor do laplaciano radial determinado pelo método dos momentos $\mathcal{L}^2 = (40,8 \pm 0,9) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$, mostrou um erro de 2,2%.

6.3. LAPLACIANO AXIAL

Mostramos, no quadro 2, a variação do laplaciano axial com o raio. As medidas foram feitas nos raios compreendidos entre 5 cm e 21 cm a fim de se eliminar influência de refletor.

O valor do laplaciano axial apresentou um erro de 2,9%.

Q U A D R O . 2

R (cm)	$\gamma^2 \times 10^4$ (cm)	$\Delta\gamma^2 \times 10^4$
5,20	42,5	0,0
6,75	43,3	0,8
10,40	43,8	1,3
11,25	44,4	1,9
13,00	39,7	2,8
15,75	43,9	1,4
18,20	42,7	0,2
20,25	42,1	0,4
20,50	40,4	2,1

$$\gamma^2 = (42,5 \pm 1,2) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$$

Tomando como valor de γ^2 o valor encontrado no raio $R_e = 18,2$ que corresponde ao nó do segundo harmônico da distribuição radial de fluxo, conforme aconselha Barre [3], temos para o laplaciano axial que chamamos de γ_R^2 o valor:

$$\gamma_R^2 = (42,7 \pm 0,2) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$$

6.4. LAPLACIANO MATERIAL

Adotamos como valor do laplaciano axial o valor γ_R^2 que corresponde, aproximadamente, ao nó do segundo harmônico da distribuição radial de fluxo $\gamma_R^2 = (42,7 \pm 0,2) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$.

Com o resultado obtido pelo método de ajuste de curvas por mínimos quadrados nos é impossível definir o laplaciano material.

Considerando, no entanto, o valor encontrado com o método dos momentos, chegamos ao valor final do laplaciano material para o reticulado estudado

$$B_m^2 = (-1,9 \pm 1,1) \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2}$$

7. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos no presente trabalho, pelo método de ajuste de curvas, vieram corroborar a afirmativa de Barre [3] de que a subcrítica Uranie, nas condições em que realizamos nosso estudo, não se presta à determinação do laplaciano material.

Quando tratamos os dados experimentais pelo método de ajuste de curvas por mínimos quadrados, sabíamos de antemão que não obteríamos resultados melhores que aqueles já obtidos. Daí, a tentativa de se aplicar o método dos momentos e o resultado, embora possa parecer sem valor prático (erro de 60%), serviu para mostrar que o método dos momentos é realmente mais indicado para reticulados miniatúra.

O método dos momentos desenvolvido neste trabalho tem várias vantagens sobre o método convencional de ajuste de curvas: melhor consistência, significado físico mais claro e economia considerável do tempo de computação. Estas vantagens são particularmente marcantes na análise do laplaciano axial devido à incerteza na determinação do "melhor valor" deste parâmetro por meio do método de ajuste de curvas.

O método dos momentos tem uma desvantagem inerente em relação ao método de ajuste de curvas, nominalmente, o erro de truncamento proveniente da avaliação dos momentos do fluxo por integração numérica .

Na análise do laplaciano radial, esta desvantagem inerente é problemática devido ao número reduzido de pontos experimentais. Esta dificuldade é, entretanto, grandemente reduzida pelo uso do método iterativo dos momentos, descrito no capítulo 3.

Comparando o método dos momentos com o método de ajuste de curvas, podemos concluir que para a análise do laplaciano axial e da altura extrapolada, ambos os métodos não conduziram a um resultado satisfatório, não se podendo, conseqüentemente, determinar a excelência de um deles sobre o outro. A determinação do laplaciano axial só foi possível ajustando-se o logaritmo das atividades medidas; para a análise do laplaciano radial, em nosso caso, o método dos momentos é preferível ao método clássico de ajuste de curvas, sendo o único a dar resultados consistentes e conduzir a um valor determinado do laplaciano material.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - UNESCO. Guia para a Redação de Artigos Científicos Destinados a Publicação - Belo Horizonte, UFMG, 1969.
- [2] - Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro - Referências Bibliográficas. Norma Brasileira [PNB06] - Rio de Janeiro, 1963.
- [3] - BARRE, J.Y. - Mesures pour l'Ensemble sous-critique Uranium-Eau Légère d'Enseignement [CEA R 2490], Grenoble, 1964.
- [4] - CHENG, H.S.; KAPLAN, I.; THONDSON, T.J.; DRISCOLL, M.J. - Use of A Moments Method for the Analysis of Flux Distributions in Subcritical Assemblies. [MITNE-84]. Cambridge, 1968.
- [5] - WEINBERG, A.M.; WIGNER, E.P. - The Physical Theory of Neutron Chain Reactors - Chicago, University of Chicago, 1958.
- [6] - MEGHREBLIAN, R.V.; HOLMES, D.K. - Reactor Analysis - New York, McGraw-Hill Book Company, 1960.
- [7] - BECKURTS, K.H.; WIRTZ, K. - Neutron Physics - New York, Springer-Verlag, 1964.
- [8] - RIBEIRO, L.M.V. - Laplaciano (Buckling) Axial - Método dos Mínimos Quadrados - [GT-142], IPR, Belo Horizonte, 1971.

- [9] - RIBEIRO, L.M.V. - Laplacianos Materiais em Subcríticas - [GT
-134A], IPR, Belo Horizonte, 1970.
- [10] - FRIEDLANDER, G.; KENNEDY, J.W.; MILLER, J.M. - Nuclear and
Radiochemistry - New York, John Willey & Sons, 1966.
- [11] - VALENTE, F.A. - A Manual of Experiments in Reactor Physics -
New York, MacMillan Company, 1963.
- [12] - CHARPENTIER, P. URANIE. I.N.S.T.N., Saclay