

INSTITUTO DE PESQUISAS RADIOATIVAS - UFMG/CNEN  
DIVISÃO DE REATORES  
PROJETO DA MONTAGEM CRÍTICA

DR-55  
Nota PMC-4  
Junho, 1972

ESPECTRO DE NEUTRONS E CRITICALIDADE  
EM UM REATOR A ÁGUA LEVE

Heitor Aloísio Mascarenhas

Tese submetida ao Corpo Docente do Curso  
de Ciências e Técnicas Nucleares da UFMG/CNEN co-  
mo parte dos requisitos necessários para a obten-  
ção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

Belo Horizonte  
Apresentada em Outubro, 1971

## PREFÁCIO

São atribuições do IPR - entre outras tarefas no campo da Física de Reatores - a participação na análise de segurança da Central de Angra (PWR), o projeto de uma montagem crítica a água leve e o "desenvolvimento de métodos de cálculo de reticulados de reatores LWR e HWR".

Dentro desta linha de trabalhos, foi decidido estudar-se o reator a água leve. Num primeiro estudo, um reator PWR simplificado: núcleo cilíndrico nu, reticulado quadrado regular, barras cilíndricas revestidas.

Este trabalho pode ser classificado [1] como uma revisão de conjunto - para atualização e adaptação - do cálculo do espectro de nêutrons e da criticalidade de um reator PWR. Procuraram-se seguir as recomendações da UNESCO sobre redação [1] e da ABNT sobre referências bibliográficas [2], foram adotadas a notação de Bell-Glasstone [3] (salvo pequenas modificações indicadas nos pés de-página) e unidades de medida padronizadas [4].

As pessoas que me ajudaram neste trabalho, o meu obrigado.

## ÍNDICE

PREFÁCIO	ii
INTRODUÇÃO	1
PARTE I <u>EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA</u>	4
1 <u>ESCOLHA DOS MÉTODOS DE CÁLCULO</u>	5
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	5
1.2 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE MODERAÇÃO	6
1.3 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE TERMALIZAÇÃO	8
1.4 MÉTODOS DE CÁLCULO DA CRITICALIDADE	10
2 <u>ESPECTRO EM MODERAÇÃO</u>	12
2.1 EQUAÇÃO DO TRANSPORTE NA MODERAÇÃO	12
2.1a Expressão Geral	12
2.1b Hipóteses Simplificativas	13
2.1c Expressão Simplificada	15
2.1d Expressão em Letargia	15
2.1e Transformação de Fourier	16
2.2 FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA	17
2.2a Espalhamento Elástico	17
2.2b Espalhamento Inelástico	19
2.2c Fissão	20 <sup>o</sup>
2.3 APROXIMAÇÃO $P_N$	21
2.3a Aproximação $P_1$	24
2.3b Hipóteses de Selengut-Goertzel	25
2.3c Aproximação $P_1$ Inconsistente (ou de Selengut-Goertzel)	26
2.3d Aproximação $P_1$ Consistente	27
2.3e Hipótese de Goertzel-Greuling	28
2.3f Aproximação $P_1$ (Consistente) de Goertzel-Greuling	30

2.4	APROXIMAÇÃO $B_N$	30
2.4a	Aproximação $B_1$	31
2.4b	Hipóteses de Selengut-Goertzel	33
2.4c	Aproximação $B_1$ Inconsistente (ou de Selengut-Goertzel)	34
2.4d	Aproximação $B_1$ Consistente	34
2.4e	Hipótese de Goertzel-Greuling	35
2.4f	Aproximação $B_1$ (Consistente) de Goertzel-Greuling	35
2.5	COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES $P_N$ E $B_N$	36
3 <u>ESPECTRO EM TERMALIZAÇÃO</u>		38
3.1	EQUAÇÃO DO TRANSPORTE NA TERMALIZAÇÃO	38
3.1a	Expressão Geral	38
3.1b	Hipóteses Simplificativas	39
3.1c	Expressão Simplificada	40
3.1d	Sistema de Equações da Termalização	41
3.1e	Correção de Transporte	42
3.2	MODELO SECUNDÁRIO	43
4 <u>CRITICALIDADE</u>		46
CÁLCULO ZERO-DIMENSIONAL		46
PARTE II <u>RESOLUÇÃO DO PROBLEMA</u>		48
5 <u>TRATAMENTO ESPACIAL</u>		49
5.1	CILINDRIZAÇÃO	49
5.2	HOMOGENEIZAÇÃO	49
5.2a	Homogeneização no Domínio de Moderação	49
5.2b	Homogeneização no Domínio de Termalização	51
6 <u>TRATAMENTO ENERGÉTICO</u>		53
6.1	ESPECTRO DE MODERAÇÃO	53

6.1a Sistema de Equações da Moderação	53
6.1b Discretização do Sistema de Equações	55
6.1c Tratamento da Absorção Ressonante	58
6.1d Correção para o Efeito Dúppler	59
6.1e Correção para o Efeito de Auto-Blindagem	61
6.1f Tratamento da Fissão Ressonante	61
6.1g Determinação do Espectro	62
6.2 ESPECTRO DE TERMALIZAÇÃO	63
6.2a Equação do Balanço de Nêutrons	63
6.2b Hipóteses Simplificativas	63
6.2c Discretização da Equação do Balanço	64
6.2d Determinação do Espectro	66
6.3 ACOPLAMENTO DE ESPECTROS	67
7 <u>CONSTANTES DOS MACRO-GRUPOS</u>	69
7.1 CONSTANTES DOS MACRO-GRUPOS RÁPIDOS	69
7.2 CONSTANTES DO MACRO-GRUPO TÉRMICO	71
SUGESTÕES	73
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	74
ANEXO I : ESTRUTURA DO DOMÍNIO DE MODERAÇÃO	76
ANEXO II : ESTRUTURA DO DOMÍNIO DE TERMALIZAÇÃO	77 <sup>6</sup>
ANEXO III: FORMALISMO DO CÁLCULO DO FATOR DE AUTO- BLINDAGEM	78
ANEXO IV : FORMALISMO DO CÁLCULO DO FATOR DE VANTA GEM RÁPIDO	80
ANEXO V : "BUCKLING" GEOMÉTRICO RADIAL X RAIOS INS- CRITO PARA REATORES POLIGONAIS DE N LA- DOS	83

## INTRODUÇÃO

Na Exposição do Problema são revistos rapidamente os métodos usuais de cálculo de reatores. Analisados estes métodos, são escolhidos a aproximação  $B_1$  para a moderação, o modelo secundário de Cadilhac para a termalização e a teoria da difusão para o cálculo de criticalidade. A seguir é feita uma exposição didática dos métodos usados, de suas hipóteses e aproximações.

Na Resolução do Problema apresentam-se os formalismos finais de cálculo sobre os quais deverão ser elaborados os códigos de moderação, de termalização e de cálculo de criticalidade. Para entrada nos códigos de cálculo de espectro, a célula do reator é cilindrizada e homogeneizada; para entrada no código de cálculo de criticalidade, parâmetros físicos são ponderados pelo espectro formando constantes de um pequeno número de macro-grupos. Na cilindrização toma-se a célula cilíndrica de mesmo volume; na homogeneização calculam-se fatores de vantagem e de desvantagem, através de probabilidades de primeira colisão (código CORTINA-ALCOLL [6,7]).

O código de moderação deverá ser basicamente o MUFT-4 americano [8]. Irá operar na faixa de 10 MeV a 0,625 eV, dividida em 54 grupos, calculando, pela aproximação  $B_1$  de Goertzel-Greuling, o fluxo e a corrente de nêutrons gerados por fonte plana em meio homogêneo e infinito; esta aproximação leva em conta separadamente a moderação pelo hidrogênio ou por outros elementos. O código considera fuga, espalhamentos inelástico isotrópico e elástico linearmente anisotrópico; fornece constantes de 3 macro-grupos (10 MeV-821 keV-5,53keV-0,625 eV) ou apenas 1 macro-grupo rápido (10 MeV-0,625 eV).

O código de termalização deverá ser semelhante ao COELACAN THE francês [9, 10, 11]. Irá operar na faixa de 0,625 eV a  $0,253 \times 10^{-9}$  eV, representada por 65 pontos, determinando, pelo modelo

secundário de Cadilhas, o fluxo de nêutrons gerado por fonte uniforme e isotrópica no moderador. Fornece as constantes de 1 macro-grupo térmico ( $0,625 \text{ eV} - 0,253 \times 10^{-9} \text{ eV}$ ).

O código de criticalidade se baseará na teoria da difusão, com geometria zero dimensional - o que é válido para reator nú.

Para fixar idéias, a fig. 1 apresenta uma visão global do espectro de nêutrons em um reator a água leve e de seções de choque em função da energia. (Notar os limites dos 4 macro-grupos a cima referidos).

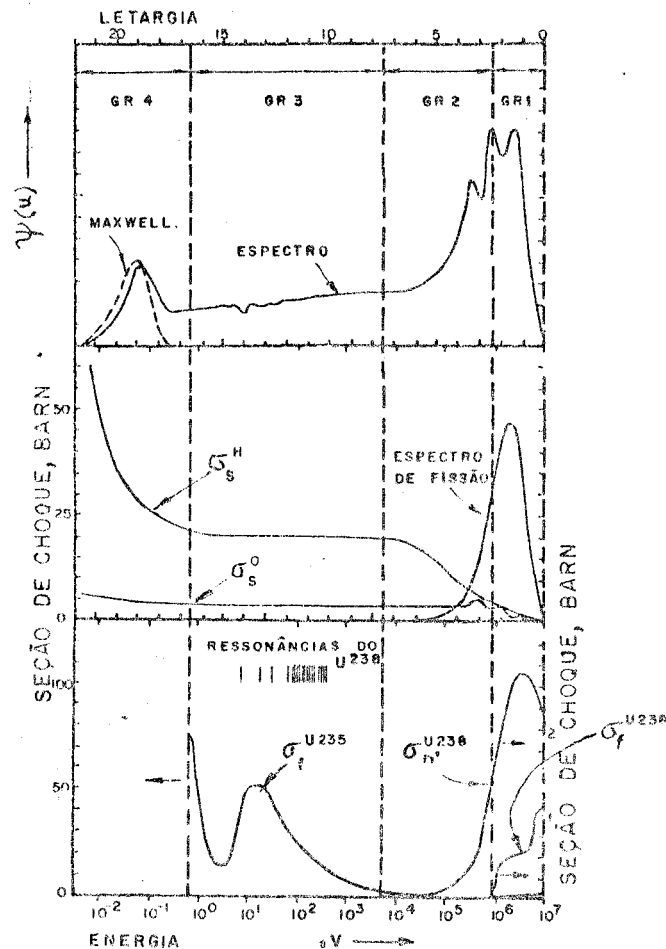


Fig. 1 Espectro de nêutrons e algumas seções de choque de um reator a água leve [12].

A fig. 2 mostra dois espectros típicos de reatores a água leve. (Notar - na curva tracejada em relação à cheia - a elevação do espectro rápido devido ao maior enriquecimento e a depressão do espectro térmico devido à menor relação moderador-combustível).

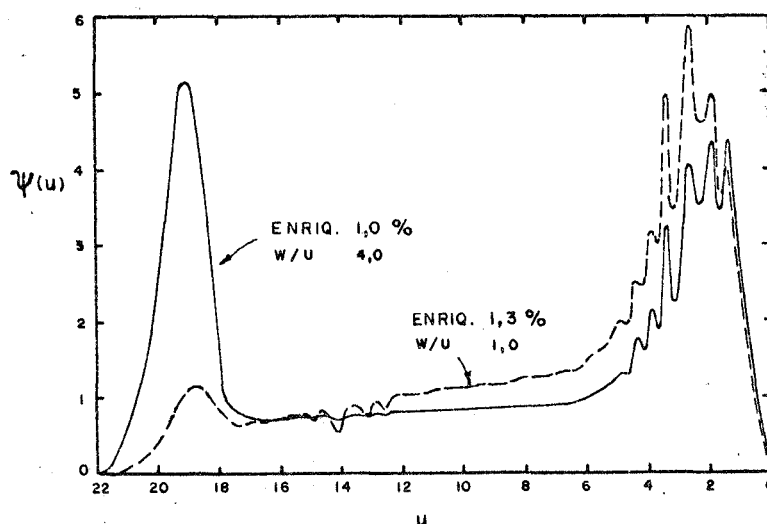


Fig. 2 Comparação de espectros típicos de reatores a água leve [13].

Como se poderá constatar, foi seguida neste trabalho a mesma linha do código francês EVEREST [11] na moderação e na termalização, qual seja, o uso de MUFT-4 e COELACANTHE [9]. Embora EVEREST não fôsse conhecido até muito pròximamente, o presente tratamento talvez possa ser considerado uma evolução dêste código.

Com efeito, serão propostas algumas modificações em relação a EVEREST:

- 1) será adotada a nova formulação do cálculo das probabilidades de colisão para choques linearmente anisotrópicos em Brun-Kavenoky [7], usadas no cálculo dos fatores de desvantagem térmicos;
- 2) estas probabilidades serão usadas no formalismo de Barrett-Hicks [14] para o cálculo de fatores de vantagem rápidos;
- 3) será introduzida em MUFT-4 correção para o efeito Döppler, conforme Goldman [15];
- 4) será corrigido o "buckling" geométrico radial do reator - parcela do  $B^2$  presente em diversas equações do parágr. 6.2 - para a não-cilindricidade do núcleo, segundo Murray et al [16].



PARTE I

EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA

PARTE I

EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O deslocamento de nêutrons na matéria é descrito pela equação básica da Física de Reatores: a equação do transporte, de Boltzmann. Esta equação, em sua forma geral, é extremamente complexa e impossível de ser resolvida analiticamente; esta complexidade surge principalmente da natureza não linear da equação e da presença de constantes (seções de choque) não analíticas e determinadas experimentalmente.

Williams [5] afirma que: "Félicemente, para o caso de nêutrons se difundindo num moderador, a densidade de nêutrons é tão menor do que a dos átomos espalhadores, que se pode desprezar a interação nêutron-nêutron e também supor-se que a distribuição de equilíbrio dos centros espalhadores não é afetada pela presença dos nêutrons. Isto permite que a equação de Boltzmann seja linearizada e muitas das bem conhecidas técnicas (numéricas) matemáticas podem então ser empregadas para resolver esta equação".

E Honeck [17] complementa: "cada um destes métodos aproximados é bem adequado a determinadas aplicações, mas nenhum deles é economicamente aplicável a todas as situações. Então o projetista de reatores deve selecionar o melhor método para o problema em mãos, compreender as aproximações usadas e estar apto para estimar sua validade. Muito freqüentemente, esta escolha do melhor método depende de extensivas comparações de resultados de cálculo e de experiências (...). A escolha também depende de considerações econômicas, isto é, do compromisso entre precisão e despesas de computação".

Sobre o cálculo da criticalidade - objetivo final do presente trabalho - afirma ainda [17]: "O problema fundamental na

criticalidade nuclear é a avaliação das taxas de reação de nêutrons numa montagem multiplicadora. O balanço entre taxas de reação determina o comportamento da montagem" e, portanto, sua criticalidade. Para o cálculo destas taxas de reação deve ser determinado o espectro de nêutrons - tanto na moderação, quanto na termalização - após o que poderá ser calculada a criticalidade.

A seguir, portanto, serão apontados os diversos métodos de cálculo (1.2) do espectro de nêutrons na moderação, (1.3) do espectro de nêutrons na termalização e, finalmente, (1.4) da criticalidade propriamente dita.

## 1.2 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE MODERAÇÃO

Referindo-se à divisão do espectro de nêutrons em duas regiões - uma de moderação, outra de termalização - Williams [5] explica: "Esta divisão é muitas vezes conveniente, desde que a estrutura matemática da equação de Boltzmann para nêutrons que podem apenas perder energia é bastante diferente daquela que descreve nêutrons que estão em equilíbrio térmico com os (núcleos) espalhadores".

No domínio de moderação, portanto, os métodos mais importantes são os métodos: (1) Monte Carlo e (2) multigrupo; outros métodos utilizam "kernels" numéricos ou aproximados para resolver a equação do transporte. ©

O método Monte Carlo é uma aplicação numérica da estatística ou teoria da probabilidade e está baseado no fato de que "a seção de choque macroscópica pode ser interpretada como uma probabilidade de interação por unidade de distância percorrida por um nêutron. Então, no método Monte Carlo, um conjunto de histórias de nêutrons é gerado seguindo nêutrons individuais através de colisões sucessivas. As localizações destas colisões e os resultados de tais colisões, por exemplo, direções e energias dos nêutrons

emergentes, são colhidos da gama de possibilidades através de números aleatórios" [3].

O método multigrupo provém da integração numérica da equação do transporte num domínio de energia subdividido em um número finito de pequenos intervalos, ou grupos. A distribuição angular do fluxo de nêutrons é representada por um desenvolvimento em polinômios ortogonais, mais comumente em harmônicos esféricos; se há um eixo de simetria para a distribuição angular, estes últimos se reduzem a polinômios de Legendre.

Truncando-se êsse desenvolvimento após  $N + 1$  termos, tem-se a aproximação  $P_N$ ; caso ainda a distribuição espacial do fluxo possa ser aproximada por um termo em cosseno ou em exponencial, pode-se ter a aproximação  $B_N$ .

No presente caso, o reator apresenta simetria em torno de seu eixo vertical, segundo o qual a distribuição espacial do fluxo é em cosseno. Pode, então, ser estudado pela aproximação  $B_1$  a qual "permite se estimarem as fugas com uma precisão equivalente àquela que se obtém no esquema da aproximação  $P_3$ " [11].

## 1.3 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE TERMALIZAÇÃO

Referindo-se à termalização, Williams [5] declara que o problema "é composto de duas partes distintas: o cálculo do "kernel" de espalhamento, e a subsequente solução da equação de Boltzmann". Dedicou um capítulo de seu livro à discussão dos "vários modelos físicos e matemáticos que têm sido empregados para descrever o espalhamento de nêutrons por gases, líquidos e sólidos" na região térmica, os quais considera em geral "extremamente complicados". Nos capítulos seguintes resolve a equação do transporte para graus crescentes de complexidade, tanto do "kernel" de espalhamento, quanto da configuração geométrica. Esta complexidade "tem duas importantes consequências: torna impossível a solução analítica das equações de Boltzmann e da difusão e, mais ainda, devido à natureza integral do operador de espalhamento (aí deduzido), faz com que a solução numérica destas equações requiera muito tempo e muita memória de computador".

Um capítulo é então dedicado aos "kernels" sintéticos de espalhamento: "Estes são funções artificiais de forma matemática simples que substituem o verdadeiro "kernel" de espalhamento e auxiliam a reduzir o volume de trabalho numérico ou analítico na subsequente solução da equação de Boltzmann". Para comprovar isto, Williams apresenta os resultados do trabalho de Schaefer-Allsopp (1965) no qual estes autores fazem testes de comparação - sob o aspecto de tempo e memória de computador - entre o método exato, de um lado, e o método sintético, de outro lado. Como "kernel" sintético escolhem o modelo secundário nas variantes: (1) teoria da difusão (corrigida para o transporte) no moderador e probabilidades de colisão no combustível e (2) probabilidades de colisão em ambos os meios. A célula é dividida em 10 regiões, 9 no moderador e 1 no combustível; o espectro de nêutrons é dividido em 80 grupos de energia: uma malha, portanto, formada de 800 pontos. A tabela 1 resume a memória requerida para cada método.

Tabela 1. Memória de Computador Utilizada para Diferentes Métodos de Termalização [5].

Variável	Modêlo secundário		Mod. exato
	Teoria Difusão	Prob. Colisão	
$P_g^{ij}$	80	4400	4400
$D_g^j$	720	0	0
$G_g^j$	800	800	0
$H_g^j$	800	800	0
$\sum_{g'g}^j$	0	0	31600
Total	2400	6000	36000

onde:

- $P_g^{ij}$  = probabilidade de colisão no grupo  $g$  ;
- $D_g^j$  = coeficiente de difusão no grupo  $g$  e na região  $j$  do modêrador;
- $G_g^j, H_g^j$  = funções do modêlo secundário no grupo  $g$  e na região  $j$  ;
- $\sum_{g'g}^j$  = seção de choque de transferência do grupo  $g'$  para o grupo  $g$ , na região  $j$ .

Williams afirma que 95% da lei do espalhamento são dados redundantes. "Há outras objeções, bastante mais filosóficas, para a solução numérica direta das equações da termalização. A principal destas sendo que a intuição física é perdida numa massa de "computer output". Há também, a objeção mais prática de que nem todos os estabelecimentos têm à sua disposição tempo ilimitado de computação ou mesmo grandes computadores (\*). "Uma vez que

(\*) O que é exatamente o caso do IPR, que conta atualmente com um IBM/360-40 de 128 K de memória.

a precisão desejada seja alcançada pelo método sintético, e isto pode ser testado para um ou dois casos de referência, parece não haver razão pela qual não poderia ser usado extensivamente no projeto de reatores".

Em vista das razões apresentadas acima - e do fato de em reatores a água leve não se aplicar a alternativa da teoria da difusão pelas pequenas dimensões da célula - será feita a escolha do modelo secundário com probabilidades de colisão, quer no combustível, quer no moderador.

#### 1.4 MÉTODOS DE CÁLCULO DA CRITICALIDADE

Referindo-se ao cálculo final da criticalidade de um reator Honeck [17] diz: "Os métodos aproximados mais comumente usados para cálculo de criticalidade, são classificados em algumas categorias amplas: Monte Carlo, ordenadas discretas, teoria integral do transporte e teoria da difusão. Dentro de cada categoria existem vários códigos de computação, cada qual com um tratamento diferente dos detalhes espaciais e da estrutura dos grupos de energia (...).

"O método Monte Carlo" - já mencionado quanto à moderação - "é potencialmente o mais exato e flexível para o cálculo das taxas de reação. Neste método o computador simula eventos individuais dos nêutrons, de modo que os processos nucleares e a complexidade geométrica podem ser reproduzidos em todos os detalhes. A precisão e o tempo de computação crescem com o número de eventos simulados. Muitos refinamentos do método tem sido introduzidos; devido a isto, associado aos computadores rápidos do presente, o método Monte Carlo é amplamente usado.

"O método de ordenadas discretas é obtido da equação do transporte, aproximando-se a distribuição angular de nêutrons em



têrmos de um conjunto de ordenadas angulares discretas e usando - se uma fórmula de interpolação adequada entre as ordenadas. O sistema de equações lineares resultante, pode ser resolvido rápida e acuradamente. Combinado com a aproximação multigrupo, o método de ordenadas discretas é aplicável a uma ampla classe de problemas que podem ser descritos por uma geometria simples, mono ou bi-dimensional.

"O método da teoria da difusão restringe a distribuição angular de nêutrons, mais ainda a uma variação linear. O sistema de equações lineares resultante pode ser resolvido muito rapidamente. A teoria da difusão multigrupo é aplicável a problemas que podem ser descritos por uma geometria simples mono ou bi-dimensional, de grandes dimensões em termos de distâncias entre colisões de nêutrons e meios aproximadamente homogêneos.

"O método da teoria integral do transporte<sup>(\*)</sup> é obtido da forma integral da equação do transporte, com a aproximação de considerar isotrópico o processo de espalhamento. A equação matricial multigrupo resultante pode ser resolvida rapidamente. A teoria integral do transporte é mais adequada à análise de reticulados heterogêneos complexos. Os resultados são geralmente usados para o cálculo de seções de choque ponderadas, para posterior uso em métodos ou de ordenadas discretas ou da teoria da difusão".

Num primeiro estudo de cálculo de criticalidade é, obviamente, escolhido o método mais elementar e, assim mesmo, aplicado ao reator mais simples. Dêste modo, será usada a teoria da difusão com geometria zero-dimensional (à qual o reator nu pode ser reduzido).

(\*) Caso não se tratasse de uma citação, êste parágrafo deveria estar em 1.3.

## 2 ESPECTRO EM MODERAÇÃO

### 2.1 EQUAÇÃO DO TRANSPORTE NA MODERAÇÃO [3,14]

#### 2.1a Expressão Geral

A expressão geral da equação do transporte na forma integro-diferencial - ou 1ª forma [18] - é :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \underline{v} \cdot \underline{\Omega} \nabla N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \Sigma(\underline{r}, E) \underline{v} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = & \quad (2.1) \\ = Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \iint \Sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \underline{v} N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' \end{aligned}$$

onde  $\underline{r}$  = ponto,  $\underline{\Omega}$  = direção,  $E$  = energia,  $t$  = tempo, e :

$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$  = densidade angular de nêutrons em  $\underline{r}, \underline{\Omega}, E$  e  $t$ ;

$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$  = densidade angular de fonte externa de nêutrons  $\underline{r}, \underline{\Omega}, E$  e  $t$ ;

$\Sigma(\underline{r}, E)$  = seção de choque macroscópica total em  $\underline{r}$  e  $E$ ;

$f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$  = função de distribuição ou densidade de probabilidade de transferência de nêutrons em  $\underline{r}$ , de  $\underline{\Omega}', E'$  para  $\underline{\Omega}, E$ ; ⑥

$\underline{v}$  = velocidade correspondente à energia  $E$  do nêutron ( $\underline{v} = \sqrt{2E/m}$ ,  $m$  = massa do nêutron).

Definindo-se  $\phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = \underline{v} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ , tem-se a forma mais usual de (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{v}} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \underline{\Omega} \cdot \nabla \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \Sigma(\underline{r}, E) \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = & \quad (2.2) \\ = Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \iint \Sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' \end{aligned}$$

## 2.1b Hipóteses Simplificativas

Adotam-se as hipóteses :

1ª O regime é estacionário: será tratado apenas o caso de reator crítico. Note-se que o próprio espectro de nêutrons é calculado "num sistema que é realmente crítico, mas quando computado se distancia um pouco da criticalidade" [3]. Portanto  $\phi$  e  $Q$  independem de  $t$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ .

2ª O meio é homogêneo: "Em reticulados a água leve, os nêutrons de alta energia (baixa letargia) têm grande livre percurso médio relativamente às dimensões de uma célula. Uma simplificação pode ser introduzida (...) supondo-se o meio homogêneo (...). Esta aproximação será mantida nos domínios epitérmico e rápido" [11]. Portanto  $\Sigma$  e  $f$  independem de  $\underline{r}$ .

3ª A geometria é plana (placa finita em  $z$ , infinita em  $x$ ,  $y$ ): "(...) conservamos à equação (...) toda sua generalidade es crevendo-a sob sua forma monodimensional. Suporemos que o fluxo angular não é variável senão segundo o eixo  $z$ , eixo de simetria para o meio considerado" [11]. Portanto  $\phi$  e  $Q$  dependem apenas de  $z$ . Há então simetria em  $\underline{z}$  e podem-se definir (\*):

$$\begin{aligned}\phi(z, \mu, E) &= \int_0^{2\pi} \phi(z, \underline{\Omega}, E) d\varphi \\ Q(z, \mu, E) &= \int_0^{2\pi} Q(z, \underline{\Omega}, E) d\varphi\end{aligned}$$

onde  $\mu = \underline{\Omega} \cdot \hat{z}$  (unitário). Além disto  $\underline{\Omega} \cdot \nabla \phi$  passa a ser  $\underline{\Omega} \cdot \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial z}$ .

4ª A função de transferência do espalhamento elástico depende apenas do núcleo alvo  $j$ , do ângulo de espalhamento  $\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}$ , e das energias inicial  $E'$  e final  $E$ : Para líquidos é "virtualmente exata" [5] a suposição de que a função de espalhamento dependa apenas do ângulo de espalhamento e não das direções indi-

---

(\*)  $\varphi$  é o ângulo polar de  $\underline{\Omega}$ .

viduais  $\underline{\Omega}'$  e  $\underline{\Omega}$ . (Na verdade - como será visto - o próprio ângulo de espalhamento é função unívoca da relação  $\bar{E}'/E$ ). Portanto  $f_n^j(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) = f_n^j(\underline{\Omega}, \underline{\Omega}; E' \rightarrow E)$ . Há então simetria em  $\underline{\Omega}'$  e pode-se definir (\*):

$$f_n^j(\mu_0; E' \rightarrow E) = \int_0^{2\pi} f_n^j(\underline{\Omega}', \underline{\Omega}; E' \rightarrow E) d\varphi = 2\pi f_n^j(\underline{\Omega}', \underline{\Omega}; E' \rightarrow E)$$

onde  $\mu_0 = \underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega}$ .

5ª As funções de transferência da fissão e do espalhamento inelástico dependem apenas do núcleo alvo j e das energias inicial  $E'$  e final  $E$ : devido à falta de dados experimentais em contrário, ambas as funções dependem apenas das energias inicial e final. Portanto  $f_n^j$  e  $f_f^j$  independem de  $\underline{\Omega}$  e  $\underline{\Omega}'$  e podem-se definir:

$$f_n^j(E' \rightarrow E) = \int_{4\pi} f_n^j(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\Omega = 4\pi f_n^j(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$$

$$f_f^j(E' \rightarrow E) = \int_{4\pi} f_f^j(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\Omega = 4\pi f_f^j(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$$

6ª No termo de transferência será considerada apenas a contribuição do espalhamento elástico. Portanto  $\Sigma^j f^j$  se reduz a  $\Sigma_n^j f_n^j$ . Considera-se que  $\varphi'$  toma valores de 0 a  $2\pi$ ,  $\mu'$  toma valores de -1 a 1 e  $E'$  toma valores de  $E$  a  $E/\alpha^j$ , sendo:

$$\alpha^j = \left( \frac{M^j - 1}{M^j + 1} \right)^2$$

onde  $M^j$  é a massa atômica do elemento j.

Considerando que  $d\Omega' = d\mu' d\varphi'$ , o termo de transferência passa a ser:

$$\sum_j \int_{-1}^1 d\mu' \int_E^{E/\alpha^j} dE' \Sigma_n^j(E') f_n^j(\underline{\Omega}', \underline{\Omega}; E' \rightarrow E) \phi(z, \mu', E')$$

onde j é núcleo espalhador elástico.

7ª O termo de fonte será formado pelas contribuições da fissão e do espalhamento inelástico. Portanto

$$Q(z, \underline{\Omega}, E) = \frac{1}{4\pi} \sum_l \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^\infty \Sigma_f^l(E') f_f^l(E' \rightarrow E) \phi(z, \mu', E') dE' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_k \int_{-1}^1 d\mu' \int_E^\infty \Sigma_n^k(E') f_n^k(E' \rightarrow E) \phi(z, \mu', E') dE' \quad (2.3)$$

(\*) Fazendo-se temporariamente  $\underline{\Omega}' \equiv z$ ,  $\varphi$  então é o ângulo polar de  $\underline{\Omega}$ .

onde  $l$  é núcleo físsil e  $k$  é núcleo espalhador inelástico;  $E$  toma valores de 0 a  $\infty$  na primeira parcela, mas apenas de  $E$  a  $\infty$  na segunda.

### 2.1c Expressão Simplificada

Integrando-se (2.2) em  $\varphi$  de 0 a  $2\pi$ , com as simplificações:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \phi(z, \mu, E) + \Sigma(E) \phi(z, \mu, E) &= & (2.4) \\ &= Q(z, \mu, E) + \sum_j \int_{-1}^1 d\mu' \int_E^{E/\alpha^j} dE' \Sigma_n^j(E') f_n^j(\mu_0; E' \rightarrow E) \times \\ &\quad \times \phi(z, \mu', E') \end{aligned}$$

### 2.1d Expressão em Letargia

No domínio de moderação, quando é preponderante o espalhamento elástico - isto é, entre 1 eV e 0,1 MeV - é conveniente usar-se a variável letargia  $u = \ln \frac{E_0}{E}$  ao invés da variável energia  $E$ . Isto porque "no espalhamento elástico um nêutron tende a perder uma fração de energia em cada choque, em vez de uma dada quantidade de energia" [3], sendo, portanto, mais adequado o uso de uma escala logarítmica de energia.

Uma vantagem, por exemplo, do uso de  $u$  é que "em muitos problemas de moderação o fluxo de nêutrons por unidade de letargia é aproximadamente constante" [3]. (Por outro lado, entretanto, a variável letargia é uma "variável desajeitada para uso na descrição de seções de choque" [3]).

Em energias inferiores a 1 eV, ou superiores a 0,1 MeV, a escolha de outras variáveis, que não a letargia, é mais adequada. No presente caso, contudo, será usada a variável  $u$ , de aproximadamente 1 eV, até 10 MeV.

Define-se então:

$$u = \ln \frac{E_0}{E}$$

onde se toma  $E_0 = 10 \text{ MeV}$ ; logo  $du = -\frac{dE}{E}$ .

Têm-se :

$$\Psi(z, \mu, u) du = -\Phi(z, \mu, E) dE$$

$$Q(z, \mu, u) du = -Q(z, \mu, E) dE$$

$$f_n(\underline{\Omega}', u \rightarrow \underline{\Omega}, u) d\underline{\Omega} du = f_n(\underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} dE$$

e faz-se ainda  $Z_n(u) = Z_n(E)$ . (Note-se que, exceto na 1ª destas igualdades, têm-se funções diferentes designadas pelos mesmos símbolos).

A eq. (2.4) então se transforma em:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial z} \Psi(z, \mu, u) + \Sigma(u) \Psi(z, \mu, u) &= \\ &= Q(z, \mu, u) + \sum_j \int_{-1}^1 d\mu' \int_{u-\zeta^j}^u du' Z_n^j(u') f_n^j(\mu_0; u' \rightarrow u) \Psi(z, \mu', u') \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $Q$  é dado por:

$$\begin{aligned} Q(z, \mu, u) &= \frac{1}{2} \sum_l \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^\infty du' Z_l^l(u') f_l^l(u' \rightarrow u) \Psi(z, \mu', u') + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^u du' Z_l^k(u') f_l^k(u' \rightarrow u) \Psi(z, \mu', u') \end{aligned} \quad (2.6)$$

e:

$$\zeta^j = \ln \frac{1}{\alpha^j}$$

## 2.1e Transformação de Fourier [3, 5, 14]

"A dependência espacial do fluxo angular total, pode frequentemente ser aproximada por um termo ou em exponencial ou em cosseno" [3]. Pode-se, então, remover-se esta dependência espacial através de uma transformação de Fourier, desde que se considere o 1º teorema fundamental da teoria de reatores [18]: A distribuição do fluxo angular de nêutrons num reator crítico nu é se-

parável em espaço e em energia (letargia).

A transformada de Fourier de  $\Psi(z)$  sendo definida por:

$$\bar{\Psi}(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z) e^{iBz} dz$$

- onde  $B^2$  é o "buckling", segundo  $\underline{z}$ , da placa considerada (\*) - as eqs. (2.6) e (2.5) se transformam em:

$$\begin{aligned} -iB\mu \bar{\Psi}(B, \mu, u) + \Sigma(u) \bar{\Psi}(B, \mu, u) &= \\ &= \bar{Q}(B, \mu, u) + \sum_j \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{du} \sum_{n=1}^j \Sigma_n^j(u) f_n^j(\mu_0; u' \rightarrow u) \bar{\Psi}(B, \mu', u') \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(B, \mu, u) &= \frac{1}{2} \sum_l \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{du} \sum_f^l \Sigma_f^l(u) f_f^l(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}(B, \mu', u') + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{du} \sum_n^k \Sigma_n^k(u) f_n^k(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}(B, \mu', u') \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.2 FUNÇÕES DE TRANSFERENCIA

### 2.2a Espalhamento Elástico [3,14]

Observe-se inicialmente, a título de ilustração, que funções de transferência ou funções de distribuição ou densidades de probabilidade -  $f_n, f_n', f_f$  - têm sentido apenas matemático; por outro lado, as correspondentes distribuições ou probabilidades -  $f_n d\mu_0 du, f_n' du, f_f du$  - têm sentido físico definido.

Analisando-se no sistema de laboratório o fenômeno físico representado por  $f_n(\mu_0; u' \rightarrow u) d\mu_0 du$ , vê-se que duas diferentes probabilidades estão aí englobadas.

(\*) Cf. 2.5 : B "pode ser associada com o "buckling" de meio finito" [17].

A 1ª delas é a probabilidade de que um nêutron - com letargia  $du$  no entorno de  $u'$ , sofrendo um choque elástico - tenha sua letargia acrescida para  $du$  no entorno de  $u$ . Seja  $P_1(u' \rightarrow u)$  esta probabilidade.

A 2ª delas é a probabilidade de que um nêutron - sofrendo um choque elástico que acresce sua letargia de  $du'$  para  $du$  - tenha sua direção desviada de um ângulo, o cosseno do qual está em  $d\mu_0$ , no entorno de  $\mu_0$ . Seja  $P_2(\mu_0) d\mu_0$  esta probabilidade.

Assim :

$$f_n(\mu_0; u' \rightarrow u) d\mu_0 du = P_1(u' \rightarrow u) du P_2(\mu_0) d\mu_0$$

Para núcleo de espalhamento de massa  $M$  vezes a massa de um nêutron, o valor de  $\mu_0$  é determinado univocamente pela<sup>(\*)</sup> diferença  $u'-u$ ; de mecânica elementar de espalhamento:

$$S \equiv \frac{1}{2} \left[ (M+1)e^{\frac{u'-u}{2}} - (M-1)e^{\frac{u-u'}{2}} \right]$$

Então  $P_2$  é dado por :

$$P_2(\mu_0) d\mu_0 = \delta(\mu_0 - S) d\mu_0$$

Adotando-se a hipótese (8ª) o espalhamento elástico é isotrópico no sistema de centro de massa,  $P_1$  é dado por: ⑥

$$P_1(u' \rightarrow u) du \begin{cases} \frac{e^{\frac{u'-u}{2}}}{1-\alpha} du & u'-\zeta \leq u \leq u' \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é  $\zeta$  já foram definidos.

Finalmente (no intervalo acima):

$$f_n(\mu_0; u' \rightarrow u) = \frac{e^{\frac{u'-u}{2}}}{1-\alpha} \delta(\mu_0 - S) \quad (2.9)$$

(\*) No caso de energia, pela relação  $E'/E$ .



Adota-se aqui, mais uma hipótese: (9ª) o espalhamento elástico é linearmente anisotrópico no sistema de laboratório ( 0 que ainda é uma aproximação, pois compostos de H "freqüentemente requerem 3 termos no desenvolvimento" [5] ).

Uma vez que, nas aproximações  $P_1$  e  $B_1$ , se vai usar o desenvolvimento de  $f_n$  em polinômios de Legendre:

$$f_n(\mu_0; u' \rightarrow u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0)$$

calculam-se aqui - em vista da 9ª hipótese - apenas os coeficientes  $f_0$  e  $f_1$ . Com efeito,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) = \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} \delta(\mu_0-5) ;$$

multiplicada por  $P_N(\mu_0)$  e integrada em  $\mu_0$  entre -1 e 1:

$$f_N(u' \rightarrow u) = \int_{-1}^1 P_N(\mu_0) \delta(\mu_0-5) \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} d\mu_0$$

e, por propriedade da função de Dirac:

$$f_N(u' \rightarrow u) = P_N(5) \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha}$$

Assim, para  $N=0$  e  $N=1$  :

$$f_0(u' \rightarrow u) = \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} \qquad f_1(u' \rightarrow u) = 5 \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} \quad (2.10)$$

## 2.2b Espalhamento Inelástico [14,19]

Adotando-se a hipótese (10ª) o espalhamento inelástico é isotrópico no sistema de laboratório, a função de transferência por espalhamento inelástico é dada - geralmente em função da energia por ter expressão mais simples - pelo "modelo da evaporação nuclear estatística", de Weisskopf [19]:

$$f_{n'}(E' \rightarrow E) = \frac{E}{T^2} e^{-\frac{E}{T}} \quad (2.11)$$

onde  $T$  - temperatura nuclear - é dada por:

$$T = 3,2 \sqrt{\frac{E'}{M}}$$

sendo  $M$  a massa atômica do núcleo espalhador e  $T$ ,  $E$  e  $E'$  dados em MeV.

### 2.2c Fissão [3,19]

Adotando-se a hipótese (11<sup>a</sup>) a fissão é isotrópica no sistema de laboratório, a função de transferência por fissão é dada por (\*):

$$f_f(u' \rightarrow u) = \nu(u') \chi(u) \quad (2.12)$$

onde tanto  $\nu(u')$  - número médio de nêutrons (tanto prontos quanto atrasados) liberados por fissão - quanto  $\chi(u)$  - espectro de fissão - são geralmente dados em função da energia.

Assim [19]:

$$\nu(E) = \nu_0 + aE$$

onde os parâmetros  $\nu_0$  e  $a$  dependem tanto do elemento fissil quanto da energia do nêutron incidente e são dados pela tabela 2. ©

---

(\*) Bell-Glasstone não fazem esta divisão em  $\nu$  e  $\chi$ ; notar que  $\int_0^\infty \chi(u) du = 1$ .

Tabela 2. Parâmetros  $\gamma_0$  e  $\alpha$  [19]

Isótopo	$\gamma_0$	$\alpha, \text{MeV}^{-1}$	Energia, MeV
Th <sup>232</sup>	1,87	0,164	todo E
U <sup>233</sup>	2,48	0,075	$0 \leq E \leq 1$
	2,41	0,136	$E > 1$
U <sup>235</sup>	2,43	0,065	$0 \leq E \leq 1$
	2,35	0,150	$E > 1$
U <sup>238</sup>	2,30	0,160	todo E
Pu <sup>239</sup>	2,87	0,148	$0 \leq E \leq 1$
	2,91	0,133	$E > 1$

Acima das energias máximas constantes da tabela, aproximadamente "1 nêutron adicional é emitido por fissão para cada 6 a 7 MeV de acréscimo da energia do nêutron incidente" [19].

Ainda [19] :

$$\chi(E) = 0,453 e^{-1,036 E} \text{sh} \sqrt{2,29 E}. \quad (2.13)$$

### 2.3 APROXIMAÇÃO $P_N$ [3,11,14,17]

Na aproximação  $P_N$  a dependência angular do fluxo é representada por um conjunto de polinômios ortogonais. Em geometria qualquer, são usados harmônicos esféricos; em geometria plana, estes se reduzem a polinômios de Legendre.

Assim, no presente caso,  $\psi$  e  $Q$  - sendo funções apenas de  $z$ ,  $\mu$  e  $u$  - serão desenvolvidos em série de polinômios de Legendre (funções de  $\mu$ ):

$$\psi(z, \mu, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \psi_l(z, u) P_l(\mu),$$

$$Q(z, \mu, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} Q_l(z, u) P_l(\mu),$$

cujos coeficientes (funções de  $z$  e  $u$ ) são definidos por:

$$\psi_l(z, u) = \int_{-1}^1 \psi(z, \mu, u) P_l(\mu) d\mu,$$

$$Q_l(z, u) = \int_{-1}^1 Q(z, \mu, u) P_l(\mu) d\mu;$$

$f_n$  - sendo função apenas de  $\mu_0$ ,  $u$  e  $u'$  - será desenvolvida em série de polinômios de Legendre (funções de  $\mu_0$ ):

$$f_n(\mu_0; u' \rightarrow u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0),$$

cujos coeficientes (funções de  $u$  e  $u'$ ) são definidos por:

$$f_l(u' \rightarrow u) = \int_{-1}^1 f_n(\mu_0; u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) d\mu_0.$$

Estes desenvolvimentos são levados à eq. (2.5), resultan-

do:

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \frac{\partial}{\partial z} \psi_l(z, u) + \Sigma(u) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \psi_l(z, u) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) Q_l(z, u) + \\ & + \sum_j \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{d\mu} \frac{d\mu'}{d\mu} \sum_n^j(u') \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l^j(u' \rightarrow u) P_l(\mu_0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} P_m(\mu') \psi_m(z, u') \end{aligned}$$

A seguir  $P_l(\mu_0)$  é substituído pela relação [14]:

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{n=1}^l \frac{(l-n)!}{(l+n)!} P_l^n(\mu) P_l^n(\mu') \cos [n(\varphi - \varphi')]$$

sendo  $\varphi$  e  $\varphi'$ , respectivamente, os ângulos polares de  $\underline{\Omega}$  e  $\underline{\Omega}'$  - e a equação do transporte é integrada em  $\varphi'$  de 0 a  $2\pi$ . Mostra-se facilmente que a integral da 2ª parcela acima é sempre nula e, assim sendo, a reorganização do último termo da equação do transporte fornece:

$$\sum_j \int_{u-\xi^j}^u du' \sum_n^j(u) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l^j(u' \rightarrow u) P_l(\mu) \times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} \psi_m(z, u') \int_{-1}^1 d\mu' P_l(\mu') P_m(\mu')$$

Devido à ortogonalidade dos polinômios de Legendre, a última integral acima é igual a zero, quando  $m \neq l$ ; é igual a  $\frac{2}{2m+1}$ , quando  $m = l$ . Neste último caso, as frações se cancelam e o 2º somatório se reduz apenas ao termo onde  $m = l$ . A equação do transporte então, passa a ser:

$$\mu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \frac{\partial}{\partial z} \psi_l(z, u) + \sum(u) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \psi_l(z, u) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) Q_l(z, u) + \quad (2.14)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u du' \sum_n^j(u) f_l^j(u' \rightarrow u) \psi_l(z, u')$$

Agora, desenvolve-se  $\mu P_l(\mu)$  do 1º termo, segundo a relação:

$$\mu P_l(\mu) = \frac{l}{2l+1} P_{l-1}(\mu) + \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1}(\mu) \quad ;$$

a equação do transporte é multiplicada por  $P_m(\mu)$  e integrada em  $\mu$  entre  $-1$  e  $1$ . Para todos os termos que não o 1º, aparecem frações que se cancelam, os somatórios ficando reduzidos ao termo em  $m$ . Para o 1º termo tem-se:

$$\int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{l}{2} P_{l-1}(\mu) + \frac{l+1}{2} P_{l+1}(\mu) \right] P_m(\mu) \frac{\partial}{\partial z} \psi_l(z, u) du =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \psi_l(z, u) \frac{l}{2} \int_{-1}^1 P_{l-1}(\mu) P_m(\mu) d\mu +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \psi_l(z, u) \int_{-1}^1 \frac{l+1}{2} P_{l+1}(\mu) P_m(\mu) d\mu$$

A 1ª integral é nula, exceto quando  $l+1=m$  ou seja  $l=m+1$ ; neste caso, vale  $\frac{2}{2m+1}$  e o somatório se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_{m+1}(z, u) \frac{m+1}{2} \frac{2}{2m+1};$$

a 2ª parcela é nula, exceto quando  $l+1=m$ , ou seja,  $l=m-1$ ; neste caso, vale  $\frac{2}{2m+1}$  e o 2º somatório se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_{m-1}(z, u) \frac{m}{2} \frac{2}{2m+1}.$$

A equação do transporte, finalmente, fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \psi_{m+1}(z, u) \frac{m+1}{2m+1} + \frac{\partial}{\partial z} \psi_{m-1}(z, u) \frac{m}{2m+1} + \Sigma(u) \psi_m(z, u) = \\ = Q_m(z, u) + \sum_j \int_{u-s^j}^u \sum_n^j(u') f_m^j(u' \rightarrow u) \psi_m(z, u') du' \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $m = 0, 1, 2, \dots$

Mantidas as primeiras  $N+1$  equações e, na última destas, eliminado o termo  $\frac{\partial}{\partial z} \psi_{N+1}$ , tem-se a chamada aproximação  $P_N$ .

### 2.3a Aproximação $P_1$ .

Na aproximação  $P_1$  - introduzindo-se  $f_0$  e  $f_1$  dados por (2.10) - as equações (2.15) se tornam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \psi_1(z, u) + \Sigma(u) \psi_0(z, u) = Q_0(z, u) + \\ + \sum_j \int_{u-s^j}^u \sum_n^j(u') \psi_0(z, u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha^j} du' \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \psi_0(z, u) + \Sigma(u) \psi_1(z, u) = Q_1(z, u) + \\ + \sum_j \int_{u-s^j}^u \sum_n^j(u') \psi_1(z, u') S^j(u', u) \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha^j} du' \end{aligned}$$

Esta é a aproximação  $P_1$  da equação do transporte para o cálculo do espectro de moderação dependente de variável espacial em meio contendo diversos elementos. (Os termos  $\psi_0$  e  $\psi_1$  são, respectivamente, o fluxo total  $\psi(x,u)$  e a corrente na direção z  $J_z(x,u)$ ).

A transformação de Fourier das equações acima é:

$$-iB\bar{\psi}_1(B,u) + \Sigma(u)\bar{\psi}_0(B,u) = \bar{Q}_0(B,u) + \sum_j \int_{u-g^j}^u \Sigma_n^j(u') \bar{\psi}_0(B,u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha^j} du' \quad (2.17)$$

$$-\frac{iB}{3}\bar{\psi}_0(B,u) + \Sigma(u)\bar{\psi}_1(B,u) = \bar{Q}_1(B,u) + \sum_j \int_{u-g^j}^u \Sigma_n^j(u') \bar{\psi}_1(B,u') S^j(u',u) \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha^j} du'$$

Esta é a transformada de Fourier da aproximação  $P_1$  (independente da variável espacial).

Em ambos os casos, (2.16) e (2.17),  $\alpha^j$  e  $S^j$  são dados, para o elemento  $j$ , por:

$$\alpha^j = \left( \frac{M^j - 1}{M^j + 1} \right)^2 \quad (2.18)$$

$$S^j(u',u) = \frac{1}{2} \left[ (M^j + 1) e^{\frac{u'-u}{2}} - (M^j - 1) e^{-\frac{u'-u}{2}} \right] \quad (2.19)$$

A única dificuldade em se usarem (2.16) ou (2.17) no cálculo multigrupo, reside na avaliação das integrais. Para se contornar esta dificuldade sem excessivo cálculo numérico, foram adotadas hipóteses simplificativas que levam a novas aproximações. Umás e outras são expostas a seguir.

### 2.3b Hipóteses de Selengut-Goertzel

Selengut-Goertzel adotam as hipóteses de que, para colisões com núcleos que não o H, as densidades de colisão variam lentamente com a letargia. Assim sendo, podem ser desenvolvidas em

série de Taylor em torno de  $u$  (da qual se tomam apenas 2 ou 1 termos).

Assim,

$$\sum_n^j(u') \bar{\Psi}_0(B, u') \approx \sum_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) + (u' - u) \frac{\partial}{\partial u} [\sum_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u)] \quad (2.20)$$

$$\sum_n^j(u') \bar{\Psi}_1(B, u') \approx \sum_n^j(u) \bar{\Psi}_1(B, u) \quad (2.21)$$

### 2.3c Aproximação $P_1$ Inconsistente (ou de Selengut-Coertzel)

Uma vez que, para núcleos pesados,  $\alpha^j$  não é muito menor do que 1 - de modo que os intervalos de integração nas equações  $P_1$  correspondentes são muito pequenos em escala de letargia - e uma vez que as densidades de colisão não variam muito nestes intervalos, conclui-se que as aproximações acima são bastante boas para núcleos pesados.

Para o H, entretanto, o intervalo de integração é demasiado grande para qualquer das aproximações ser usada. Não obstante - apesar de permanecer a integral relativa ao H na 1ª das equações  $P_1$  - a hipótese (2.21) é usada para o H na 2ª das equações: daí a aproximação ser chamada  $P_1$  inconsistente. ⑥

O sistema de equações (2.17) se torna:

$$\begin{aligned} -iB \bar{\Psi}_1(B, u) + \sum(u) \bar{\Psi}_0(B, u) &= \bar{Q}_0(B, u) + \sum_{j \neq H} \sum_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) + \\ &- \sum_{j \neq H} \xi^j \frac{\partial}{\partial u} \sum_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) + \int_0^u \sum_n^H(u') \bar{\Psi}_0(B, u') e^{u'-u} du' \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} -\frac{iB}{3} \bar{\Psi}_0(B, u) + \sum(u) \bar{\Psi}_1(B, u) &= \bar{Q}_1(B, u) + \\ &+ \sum_j \bar{\mu}^j \sum_n^j(u) \bar{\Psi}_1(B, u) \end{aligned}$$



onde:  $\xi_j^i = 1 + \frac{\alpha^j \ln \alpha^j}{1 - \alpha^j}$   $\bar{\mu}^j = \frac{\alpha}{3 M^j}$  . (2.23)

Esta é a transformada de Fourier da aproximação  $P_1$  inconsistente (ou de Selengut-Coertzel) da equação do transporte, para o cálculo do espectro de moderação em meio contendo H. (Notar que permanece a integral correspondente a H na 1ª das equações).

No caso de  $Q_0 = 0$  - fonte isotrópica - a 2ª das equações acima permite que se defina um coeficiente de difusão relacionando  $\alpha \bar{\psi}_0$  a  $\bar{\psi}_1$ . Assim:

$$D(u) = \frac{1}{3[Z(u) - \sum_j \bar{\mu}^j Z_n^j(u)]}$$

que é levada à 1ª das equações (2.22). Tomando-se então, a transformada inversa desta equação, e observando-se que, no caso  $Z(u) = Z_0(u) + Z_n^H(u) + \sum_{j \neq H} Z_n^j(u)$ :

$$-D(u) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_0(z, u) + Z_0(u) \psi_0(z, u) = Q_0(z, u) - Z_n^H(u) \psi_0(z, u) + \sum_{j \neq H} \xi_j^i \frac{\partial}{\partial u} Z_n^j(u) \psi_0(z, u) + \int_0^u Z_n^H(u') \psi_0(z, u') e^{u'-u} du' \quad (2.24)$$

Esta é a aproximação  $P_1$  inconsistente (ou de Selengut-Coertzel) - para fonte isotrópica - da equação do transporte, para o cálculo do espectro de moderação em meio contendo H. (Notar que permanece a integral em H).

### 2.3d Aproximação $P_1$ Consistente

As hipóteses de Selengut-Coertzel (2.20) e (2.21) são adotadas para os núcleos pesados. Para o H, entretanto, nenhuma das hipóteses é usada - permanecendo ambas as integrais a êle relativas: daí a aproximação ser chamada  $P_1$  consistente.

O sistema de equações (2.17) se torna:

$$\Sigma(u) \bar{\Psi}_0(B, u) - iB \bar{\Psi}_1(B, u) = \bar{Q}_0(B, u) + \sum_{j \neq H} \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) +$$

$$- \sum_{j \neq H} \xi^j \frac{\partial}{\partial u} \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) + \int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_0(B, u') e^{u'-u} du' \quad (2.25)$$

$$- \frac{iB}{3} \bar{\Psi}_0(B, u) + \Sigma(u) \bar{\Psi}_1(B, u) = \bar{Q}_1(B, u) + \sum_{j \neq H} \mu^j \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_1(B, u)$$

$$+ \int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_1(B, u') e^{\frac{3}{2}(u'-u)} du'$$

onde  $S^H = e^{\frac{1}{2}(u'-u)}$  foi introduzido na 2ª eq. do sistema.

Esta é a transformada de Fourier da aproximação  $\tilde{P}_1$  consistente da equação do transporte, para o cálculo do espectro de moderação em meio contendo H.

Deve ser ressaltado que a única diferença entre as aproximações  $P_1$  inconsistente e  $\tilde{P}_1$  consistente reside no fato de que na aproximação inconsistente é usada a 2ª hipótese de Selengut-Goertzel para o H, enquanto na consistente, nenhuma hipótese é usada para o H. (Notar que ambas as hipóteses de Selengut-Goertzel são usadas para os núcleos pesados em ambas as aproximações).

### 2.3e Hipótese de Goertzel-Creuling

A densidade de moderação em função da letargia - obtida de  $q(\xi)$  [20] - é:

$$q(B, u) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{u-\xi}^u \Sigma_n(u') \bar{\Psi}_0(B, u') [e^{u'-u} - \alpha] du'$$

onde  $\xi$  e  $\alpha$  já foram definidos. Derivando-se esta equação:

$$\frac{\partial}{\partial u} q(B, u) = \Sigma_n(u) \bar{\Psi}_0(B, u) - \frac{1}{1-\alpha} \int_{u-\xi}^u \Sigma_n(u') \bar{\Psi}_0(B, u') e^{u'-u} du'$$

Goertzel-Greuling adotam a hipótese de que a densidade de colisão  $\sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u)$  varia lentamente no intervalo de integração. Assim sendo,  $\sum_n(u')\bar{\Phi}_0(B,u')$  é bem representada apenas por 2 termos de seu desenvolvimento em série de Taylor no entorno de  $u$  e as equações anteriores se escrevem:

$$q(B,u) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{u-\xi}^u \left[ \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) + (u'-u) \frac{\partial}{\partial u} \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) \right] (e^{u'-u} - \alpha) du'$$

$$\frac{\partial}{\partial u} q(B,u) = \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) - \frac{1}{1-\alpha} \int_{u-\xi}^u \left[ \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) + (u'-u) \frac{\partial}{\partial u} \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) \right] e^{u'-u} du'$$

Integrando-se estas equações:

$$q(B,u) = \xi \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) + a \frac{\partial}{\partial u} \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} q(B,u) = \xi \frac{\partial}{\partial u} \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u)$$

estando  $\xi$  já definido em (2.23) e:

$$a = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \alpha - \alpha\xi + \frac{1}{2} \alpha \xi^2 - 1 \right]$$

Eliminando-se  $\frac{\partial}{\partial u} \sum_n \bar{\Phi}_0$  entre as equações anteriores, chega-se à equação da moderação de Goertzel-Greuling:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial u} q(B,u) + q(B,u) = \xi \sum_n(u)\bar{\Phi}_0(B,u) \quad (2.26)$$

sendo:

$$\lambda = -\frac{a}{\xi} = -\frac{1}{\xi(1-\alpha)} \left[ \alpha - \alpha\xi + \frac{1}{2} \alpha \xi^2 - 1 \right] \quad (2.27)$$

Para um meio moderador contendo diversos elementos:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial u} q(B,u) + q(B,u) = \sum_{j \neq H} \xi_j^j \sum_n^j(u)\bar{\Phi}_0(B,u) \quad (2.28)$$

onde  $\lambda$  é obtido pela ponderação:

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq H} \xi_j^j \sum_n^j(u)\lambda^j}{\sum_{j \neq H} \xi_j^j \sum_n^j(u)} \quad (2.29)$$

sendo  $\lambda^j$  calculada pela expressão (2.27) acima, para cada valor de  $j$ .

Pode-se mostrar facilmente [14] que a equação de Goertzel-Greuling é muito versátil, uma vez que:

- 1) é exata para o H ;
- 2) é equivalente à equação da idade de Fermi para núcleos pesados;
- 3) é adequada para núcleos intermediários.

### 2.3f Aproximação $P_1$ (Consistente) de Goertzel-Greuling

Associa-se a equação de Goertzel-Greuling às equações da aproximação  $P_1$  consistente. Assim, o sistema formado por (2.25) e (2.28) será:

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega) \bar{\Psi}_0(B, u) - iB \bar{\Psi}_1(B, u) &= \bar{Q}_0(B, u) + \\ &+ \sum_{j \neq H} \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) - \frac{\partial q(u)}{\partial u} + \int_0^u \Sigma_n^H(\omega) \bar{\Psi}_0(B, u') e^{u'-u} du' \\ \Sigma(\omega) \bar{\Psi}_1(B, u) - \frac{iB}{3} \bar{\Psi}_0(B, u) &= \bar{Q}_1(B, u) + \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$+ \sum_{j \neq H} \bar{\mu}^j \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_1(B, u) + \int_0^u \Sigma_n^H(\omega) \bar{\Psi}_1(B, u') e^{\frac{3}{2}(u'-u)} du'$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial u} q(u) = -q(u) + \sum_{j \neq H} \xi^j \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) \quad \text{©}$$

### 2.4 APROXIMAÇÃO $B_N$ [3, 11, 14, 5]

Aplicando-se a transformação de Fourier a (2.14), resulta :

$$\begin{aligned} [\Sigma(\omega) - iB\mu] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \bar{\Psi}_l(B, u) &= \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \bar{Q}_l(B, u) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \Sigma_n^j(u) f_l^j(u'+u) & \\ \times \bar{\Psi}_l(B, u') du' & \end{aligned}$$

ou:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \bar{\Psi}_l(B, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{1}{Z(u) - iBu} P_l(\mu) \bar{Q}_l(B, u) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{P_l(\mu)}{Z(u) - iBu} \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \sum_n^j(u') f_l^j(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}_l(B, u') du'$$

Multiplicando-se esta equação por  $P_m(\mu)$  e integrando-se com respeito a  $\mu$ , de  $-1$  a  $1$ , obtém-se:

$$\bar{\Psi}_m(B, u) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm}(u) \bar{Q}_l(B, u) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm}(u) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \sum_n^j(u') f_l^j(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}_l(B, u') du' \quad (2.31)$$

onde:

$$A_{lm} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_m(\mu)}{Z(u) - iB\mu} d\mu \quad (2.32)$$

Mantidas as primeiras  $N+1$  equações, e nestas, apenas os  $N$  termos dos desenvolvimentos de  $Q$  e de  $f_n$ , resulta a aproximação  $B_N$ .

#### 2.4a Aproximação $B_1$

A equação (2.31) se torna:

$$\bar{\Psi}_0(B, u) = A_{00}(u) \bar{Q}_0(B, u) + A_{10}(u) \bar{Q}_1(B, u) +$$

$$+ A_{00}(u) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \sum_n^j(u') f_0^j(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}_0(B, u') du' +$$

$$+ A_{10}(u) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \sum_n^j(u') f_1^j(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}_1(B, u') du'$$

$$\bar{\Psi}_1(B, u) = A_{01}(u) \bar{Q}_0(B, u) + A_{11}(u) \bar{Q}_1(B, u) +$$

$$+ A_{01}(u) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \sum_n^j(u') f_0^j(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}_0(B, u') du' +$$

$$+ A_{11}(u) \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \sum_n^j(u') f_1^j(u' \rightarrow u) \bar{\Psi}_1(B, u') du'$$

Os  $A_{lm}$ , dados por (2.32), são calculados a seguir. Assim, fazendo-se:

$$\alpha = \frac{B}{\Sigma(u)} \quad \beta = \frac{\arctan \alpha}{\alpha}$$

tem-se:

$$A_{00} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\Sigma(u) - iB\mu} = \frac{\beta}{\Sigma(u)}$$

$$A_{01} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{\Sigma(u) - iB\mu} = \frac{i(1-\beta)}{\alpha \Sigma(u)}$$

$$A_{10} = \frac{3}{2} 2 A_{01} = \frac{3i(1-\beta)}{\alpha \Sigma(u)}$$

$$A_{11} = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mu^2 d\mu}{\Sigma(u) - iB\mu} = \frac{3(1-\beta)}{\alpha^2 \Sigma(u)}$$

Levando-se estes coeficientes à aproximação  $B_1$  - e, para simplicidade, eliminando-se os argumentos das funções e chamando-se  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  os somatórios das integrais em  $f_0$  e  $f_1$ , respectivamente:

$$\bar{\Psi}_0 = \frac{\beta}{\Sigma} \bar{Q}_0 + \frac{3i(1-\beta)}{\alpha \Sigma} \bar{Q}_1 + \frac{\beta}{\Sigma} \Sigma_0 + \frac{3i(1-\beta)}{\alpha \Sigma} \Sigma_1$$

$$\bar{\Psi}_1 = \frac{i(1-\beta)}{\alpha \Sigma} \bar{Q}_0 + \frac{3(1-\beta)}{\alpha^2 \Sigma} \bar{Q}_1 + \frac{i(1-\beta)}{\alpha \Sigma} \Sigma_0 + \frac{3(1-\beta)}{\alpha^2 \Sigma} \Sigma_1 \quad \text{©}$$

Para se eliminar  $\Sigma_1$ , a 2ª equação acima é multiplicada por  $\alpha^2$  e somada à 1ª; resulta:

$$\Sigma \bar{\Psi}_0 - iB \bar{\Psi}_1 = \bar{Q}_0 + \Sigma_0$$

Para se eliminar  $\Sigma_0$ , a 1ª das equações acima é multiplicada cada por  $\alpha^2/3(1-\beta)$  e a 2ª é multiplicada por  $-i\alpha/3$  e os resultados são somados; resulta:

$$\frac{\alpha^2 \beta}{3(1-\alpha)} \bar{\Psi}_1 - \frac{i\alpha}{3} \bar{\Psi}_0 = \frac{1}{\Sigma} \bar{Q}_1 + \frac{1}{\Sigma} \Sigma_1$$

ou, fazendo-se  $\frac{\alpha^2 \beta}{3(1-\beta)} = \gamma(u)$  e lembrando-se que  $\alpha = \frac{B}{\Sigma}$  :

$$\gamma(u) \Sigma \bar{\Psi}_1 - \frac{iB}{3} \bar{\Psi}_0 = \bar{Q}_1 + \Sigma_1$$

Introduzindo  $f_0^j$  e  $f_1^j$  dados por (2.10) e voltando-se à notação completa:

$$\begin{aligned} \Sigma(u) \bar{\Psi}_0(B, u) - iB \bar{\Psi}_1(B, u) &= \\ &= \bar{Q}_0(B, u) + \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \Sigma_n^j(u') \bar{\Psi}_0(B, u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha^j} du' \\ \gamma(u) \Sigma(u) \bar{\Psi}_1(B, u) - \frac{iB}{3} \bar{\Psi}_0(B, u) &= \quad (2.33) \\ &= \bar{Q}_1(B, u) + \sum_j \int_{u-\xi^j}^u \Sigma_n^j(u') \bar{\Psi}_1(B, u') S^j(u, u') \times \\ &\quad \times \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha^j} du' \end{aligned}$$

onde  $S^j$  é dado por (2.19) e  $\alpha^j$  por (2.18).

Esta é a aproximação  $B_1$  da equação do transporte, independente da variável espacial, para o cálculo do espectro de moderação em meio contendo diversos elementos. ©

Semelhantemente ao caso  $P_1$ , a única dificuldade em se usarem estas equações no cálculo multigrupo reside na avaliação das integrais. Assim, as mesmas aproximações usadas em  $P_1$  podem aqui ser usadas em  $B_1$ .

Portanto:

#### 2.4b Hipóteses de Selengut-Goertzel

Idênticas a 2.3b .

2.4c Aproximação  $B_1$  Inconsistente (ou de Selengut-Goertzel)

Aplicam-se as hipóteses de Selengut-Goertzel às equações da aproximação  $B_1$ , semelhantemente ao que se fez em 2.3c.

2.4d Aproximação  $B_1$  Consistente

As hipóteses de Selengut-Goertzel são adotadas para os núcleos pesados. Para o H, entretanto, nenhuma das hipóteses é usada - permanecendo ambas as integrais a êle relativas: daí a aproximação ser chamada  $B_1$  consistente.

O sistema de equações  $B_1$  se torna:

$$\begin{aligned} \Sigma(u) \bar{\Psi}_0(B, u) - iB \bar{\Psi}_1(B, u) &= \bar{Q}_0(B, u) + \\ &+ \sum_{j \neq H} \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) - \sum_{j \neq H} \xi^j \frac{\partial}{\partial u} \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_0(B, u) + \\ &+ \int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_0(B, u') e^{u'-u} du' \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\gamma(u) \Sigma(u) \bar{\Psi}_1(B, u) - \frac{iB}{3} \bar{\Psi}_0(B, u) = \bar{Q}_1(B, u) +$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j \neq H} \bar{\mu}^j \Sigma_n^j(u) \bar{\Psi}_1(B, u) + \\ &+ \int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_1(B, u') e^{\frac{\alpha}{2}(u'-u)} du' \end{aligned}$$

observando-se que  $\Sigma(u) = \Sigma_a(u) + \Sigma_n^H(u) + \sum_{j \neq H} \Sigma_n^j(u)$ .

Notar que a única diferença entre as equações (2.25) da aproximação  $P_1$  consistente e estas equações (2.34) da aproximação  $B_1$  consistente, é a presença do fator  $\gamma(u) = \frac{\alpha^2 \beta}{3(1-\alpha)}$  (onde  $\alpha = \frac{B}{\Sigma(u)}$  e  $\beta = \frac{\text{arc tan } \alpha}{\alpha}$ ) na última destas.



2.4e Hipótese de Coertzel-Greuling

Idêntico a 2.3e .

2.4f Aproximação  $\mathcal{B}_1$  (Consistente) de Coertzel-Greuling

Associa-se a equação de Coertzel-Greuling às equações da aproximação  $\mathcal{B}_1$  consistente, semelhante ao que se fez em 2.3f.

Assim, o sistema formado por (2.34) e (2.28) será:

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega) \bar{\Psi}_0(\mathcal{B}, \omega) - i\mathcal{B} \bar{\Psi}_1(\mathcal{B}, \omega) &= \bar{Q}_0(\mathcal{B}, \omega) + \\ &+ \sum_{j \neq H} \bar{\mu}^j \Sigma_n^j(\omega) \bar{\Psi}_0(\mathcal{B}, \omega) - \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} + \int_0^\omega \Sigma_n^H(\omega') \bar{\Psi}_0(\mathcal{B}, \omega') e^{\omega' - \omega} d\omega' \\ \gamma(\omega) \Sigma(\omega) \bar{\Psi}_1(\mathcal{B}, \omega) - \frac{i\mathcal{B}}{3} \bar{\Psi}_0(\mathcal{B}, \omega) &= \bar{Q}_1(\mathcal{B}, \omega) + \quad (2.35) \\ &+ \sum_{j \neq H} \bar{\mu}^j \Sigma_n^j(\omega) \bar{\Psi}_1(\mathcal{B}, \omega) + \int_0^\omega \Sigma_n^H(\omega') \bar{\Psi}_1(\mathcal{B}, \omega') e^{\frac{3}{2}(\omega' - \omega)} d\omega' \\ \lambda \frac{\partial}{\partial \omega} q(\omega) &= -q(\omega) + \sum_{j \neq H} \bar{\xi}^j \Sigma_n^j(\omega) \bar{\Psi}_0(\mathcal{B}, \omega) \end{aligned}$$

2.5 COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES  $P_N$  E  $B_N$  [14, 5]

O método  $P_N$ , aproximando tanto  $\psi$ , quanto  $Q$  e  $f_n$  - quando se faz o truncamento após as  $N+1$  equações - não determina completamente  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$ , a menos que  $\psi_{N+1}$  seja suposto nulo.

O método  $B_N$ , aproximando apenas  $Q$  e  $f_n$  - quando se faz o truncamento após os  $N$  termos dos respectivos somatórios - determina completamente  $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N$ . Além disto, "o truncamento de  $Q$  e de  $f_n$  é uma aproximação menos severa, uma vez que  $f_n$  é aproximadamente isotrópico no sistema de centro de massa, e a fonte - se é devida a fissão - é quase sempre suposta isotrópica". [5].

Por exemplo, "se é acurado supor-se que o espalhamento é não mais do que linearmente anisotrópico, de modo que  $f_n = 0$  para  $n \geq 2$ , a aproximação  $B_1$  dará  $\bar{\psi}_0$  e  $\bar{\psi}_1$  exatamente, enquanto a aproximação  $P_1$  não dará  $\psi_0$  e  $\psi_1$  exatamente desde que requer que  $\psi_2$  seja suposto nulo (o que geralmente não é verdade)". [14].

"Pode-se concluir que, para a mesma ordem  $N$ , a aproximação  $B_N$  será mais precisa do que a aproximação  $P_N$ . Fisicamente, a razão para esta afirmação é vista, notando-se que a distribuição de nêutrons emergindo de choque elástico é em geral consideravelmente menos anisotrópica do que o fluxo angular, de modo que uma baixa ordem de  $N$  na aproximação  $B_N$  será bastante precisa, enquanto que o desprezo de  $\psi_{N+1}$  na aproximação  $P_N$  pode bem ser uma séria imprecisão. Por estas razões, vê-se que a aproximação  $B_N$  converge para a solução exata da equação de Boltzmann mais rapidamente do que o faz a aproximação  $P_N$ ". [14]

"Pergunta-se por que então usamos o método  $P_N$  desde que o método  $B_N$  tem aparentemente tantas virtudes. Aqui jaz a questão que raramente é esclarecida: o método  $B_N$  se aplica a um meio infinito, enquanto que o método  $P_N$  pode ser aplicado a qualquer sis

tema finito , pela consideração de condição de contorno , ou de Marshak, ou de Mark. A única maneira na qual o método  $B_N$  pode ser usado em meios finitos é se estes são homogêneos e o comportamento espacial (...) é do tipo  $e^{i \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}} \varphi(E, B)$ , isto é, as variáveis de espaço e de energia são separáveis. Dêste modo, a variável  $B$  da transformada de Fourier pode ser associada com um "buckling" de meio finito. Então, o sistema deve ser nu. A definição de "buckling" (...) depende do valor que tomamos para a fronteira extrapolada,  $Z_0$ . (...) foi mostrado que, para se obter  $Z_0$  condições de contorno devem ser incorporadas ao problema, isto é, devemos usar o método  $P_N$  ou outro mais flexível. Se, como é frequentemente o caso, estamos tratando com um reator nuclear, então o sistema pode ser tão grande, (...) que o valor de  $Z_0$  não é importante. Neste caso, o método  $B_N$  é de grande valor". [5]

Quanto à resolução numérica das equações multigrupo - quer na aproximação  $P_1$ , quer na aproximação  $B_1$  - o intervalo de moderação (de letargia 0 a aproximadamente 17) é dividido em pequenos intervalos e se usa o processo de solução "em cadeia". No caso mais comum onde  $Q$  é fonte de fissão há necessidade de se iterar todo o processo - partindo-se de uma estimativa  $Q^{(0)}$  para esta fonte - até se obter a convergência .

### 3 ESPECTRO EM TERMALIZAÇÃO

#### 3.1 EQUAÇÃO DO TRANSPORTE NA TERMALIZAÇÃO [3,11]

##### 3.1a Expressão Geral

A expressão geral da equação do transporte na forma íntegro-diferencial - ou 1ª forma [18] - pode ser escrita (cf. 2.1a):

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \underline{\Omega} \cdot \nabla \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \Sigma(\underline{r}, E) \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = h(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (3.1)$$

onde  $h(*)$  é denominado densidade de emissão [21] e é igual a:

$$h(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = \iint \Sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' + Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (3.2)$$

Através do método das características [3], a equação do transporte (3.1) pode ser posta na forma integral - ou 3ª forma [18] :

$$\phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = \int_0^{\infty} \exp \left[ - \int_0^s \Sigma(\underline{r} - s' \underline{\Omega}, E) ds' \right] \times \quad (3.3) \\ \times h(\underline{r} - s \underline{\Omega}, \underline{\Omega}, E, t - s/v) ds$$

A eq. (3.3) significa que a densidade do fluxo de nêutrons em  $\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t$  é constituída por tôdas as fontes de nêutrons com  $E$  e  $\underline{\Omega}$  - situadas nas posições  $\underline{r} - s' \underline{\Omega}$ ,  $s' > 0$  - multiplicadas pelo fator de atenuação :

(\*) Será usado aqui  $h$  - no lugar de  $q$  de Bell-Glasstone - para diferenciar da densidade de moderação.

$$\exp\left[-\int_0^s \Sigma(\underline{r}-s'\underline{\Omega}; E) ds'\right]$$

pelo qual o número de nêutrons é reduzido até atingir  $\underline{r}$ .

A integral  $\int_0^s \Sigma(\underline{r}-s'\underline{\Omega}; E) ds'$  conta o número de livre percursos médios de colisão entre  $\underline{r}-s'\underline{\Omega}$  e  $\underline{r}$  e é chamada caminho ótico  $\tau(\underline{r}-s'\underline{\Omega} \rightarrow \underline{r}; E)$ ; se  $\Sigma$  é constante,  $\tau = \Sigma|s|$ .

### 3.1b Hipóteses Simplificativas

Define-se:

$$\phi(\underline{r}, E) = \int_{4\pi} \phi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) d\Omega$$

e adotam-se as hipóteses:

1ª O regime é estacionário: cf. 2.1b. Portanto  $\phi$ ,  $h$  e  $Q$  independem de  $t$ .

2ª A função de transferência do espalhamento elástico depende apenas do ponto  $\underline{r}$ , do núcleo alvo  $i$  e das energias inicial  $E'$  e final  $E$  ( $E' \geq E$ ): por simplicidade o espalhamento deve ser considerado isotrópico (pode-se, entretanto, corrigi-lo para a anisotropia, como será visto). Portanto: ⊙

$$f_n^j(\underline{r}; E' \rightarrow E) = \int_{4\pi} f_n^j(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\Omega = 4\pi f_n^j(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$$

3ª No termo de transferência será considerada apenas a contribuição do espalhamento elástico. Portanto  $\Sigma^j f^j$  se reduz a  $\Sigma_n^j f_n^j$ . Sendo  $\Sigma_c$  a energia superior do domínio de termalização, o termo de transferência passa a ser:

$$\sum_j \int_0^{E_c} \sum_n^j (\underline{r}, E') f_n^j (\underline{r}, \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{r}, E) \varphi (\underline{r}, E') dE'$$

e define-se:

$$h(\underline{r}, E) = \int_{4\pi} h(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} = 4\pi h(\underline{r}, \underline{\Omega}, E)$$

4ª O termo de fonte será formado apenas pela moderação através de  $E_c$ : por simplicidade esta fonte de moderação será considerada isotrópica. Portanto define-se:

$$Q(\underline{r}, E) = \int_{4\pi} Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} = 4\pi Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E)$$

### 3.1c Expressão Simplificada

Considerando-se as simplificações, o termo  $h$  -eq.(3.2)- se torna:

$$h(\underline{r}, E) = \sum_j \int_0^{E_c} \sum_n^j (\underline{r}, E') f_n^j (\underline{r}, E' \rightarrow E) \varphi (\underline{r}, E') dE' + Q(\underline{r}, E). \quad (3.4) \quad \odot$$

Tomando-se (3.4), a equação do transporte (3.3) será agora integrada em  $\underline{\Omega}$ , sobre  $4\pi$ . Entretanto, observa-se [3] que (\*):

$$ds' d\underline{\Omega} = \frac{dn'}{s'^2} \frac{d\underline{\Omega}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2}$$

---

(\*) Usa-se  $d\underline{\Omega}'$  ao invés de  $d\underline{v}'$  de Bell-Glasstone.

a integração dupla recaindo numa integração sôbre o volume  $V$  do meio.

Fazendo-se  $\underline{r}' = \underline{r} - s' \underline{\Omega}$ , (3.3) se torna:

$$\varphi(\underline{r}, E) = \int_V d\underline{r}' \frac{e^{-\tau(\underline{r}' \rightarrow \underline{r}; E)}}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} h(\underline{r}', E) \quad (3.5)$$

Chamando-se  $K(\underline{r}', \underline{r}, E)$  o "kernel" da integral acima-que é a função de Green do fluxo sem choque à energia  $E$  - tem-se finalmente:

$$\varphi(\underline{r}, E) = \int_V K(\underline{r}', \underline{r}, E) h(\underline{r}', E) d\underline{r}' \quad (3.6)$$

### 3.1d Sistema de Equações da Termalização

Introduz-se a densidade de moderação:

$$q(\underline{r}, E) = \sum_j \left[ \int_0^E dE'' \int_E^\infty \Sigma_n^j(\underline{r}, E) f_n^j(\underline{r}; E' \rightarrow E'') \varphi(\underline{r}, E') dE' + \right. \\ \left. - \int_E^\infty dE'' \int_0^E \Sigma_n^j(\underline{r}, E') f_n^j(\underline{r}; E' \rightarrow E'') \varphi(\underline{r}, E') dE' \right]$$

através de cuja derivada define-se o operador de termalização  $\mathcal{H}$ : ©

$$\mathcal{H}\varphi(\underline{r}, E) = \frac{\partial}{\partial E} q(\underline{r}, E) = \sum_j \left[ \int_0^\infty dE' \Sigma_n^j(\underline{r}, E') f_n^j(\underline{r}; E' \rightarrow E) \varphi(\underline{r}, E') + \right. \\ \left. - \Sigma_n^j(\underline{r}, E) \varphi(\underline{r}, E) \right] \quad (3.7)$$

Observando-se que:

$$h(\underline{r}, E) = \frac{\partial}{\partial E} q(\underline{r}, E) + Q(\underline{r}, E) + \sum_j \Sigma_n^j(\underline{r}, E) \varphi(\underline{r}, E)$$

segue:

$$\varphi(\underline{r}, E) = \int_V K(\underline{r}', \underline{r}, E) \left[ \frac{\partial}{\partial E} \varphi(\underline{r}', E) + Q(\underline{r}', E) + \sum_j \Sigma_n^j(\underline{r}', E) \varphi(\underline{r}', E) \right] d\underline{r}'$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \varphi(\underline{r}, E) = \mathbb{H} \varphi(\underline{r}, E) \quad (3.8)$$

Este é o sistema de equações da termalização para o cálculo do espectro de termalização em meio heterogêneo.

### 3.1e Correção de Transporte [11, 21, 27]

Por simplicidade em 3.1b não foi levada em conta a anisotropia do choque elástico de nêutrons. Pode-se, entretanto, fazer uma simples correção de transporte para esta anisotropia.

Com efeito, no lugar da função de transferência e da seção de choque do espalhamento - constantes de (3.7) e de (3.8) - podem-se usar respectivamente as grandezas definidas por

$$\widetilde{\Sigma}_n^j(\underline{r}, E) f_n^j(\underline{r}; E' \rightarrow E) = \Sigma_n^j(\underline{r}, E') f_n^j(\underline{r}; E' \rightarrow E) - \Sigma_{n_1}^j(\underline{r}, E') \delta(E - E')$$

e:

$$\widetilde{\Sigma}_n^j(\underline{r}, E) = \Sigma_n^j(\underline{r}, E) - \Sigma_{n_1}^j(\underline{r}, E) \quad \odot$$

onde:

$$\Sigma_{n_1}^j(\underline{r}, E) = \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^\infty \widetilde{\Sigma}_n^j(\underline{r}, E') f_n^j(\underline{r}; \mu; E' \rightarrow E) dE'$$

A figura 3 demonstra a eficiência da correção de transporte no cálculo do fator de desvantagem térmico, para dois diâmetros diferentes das barras combustíveis.



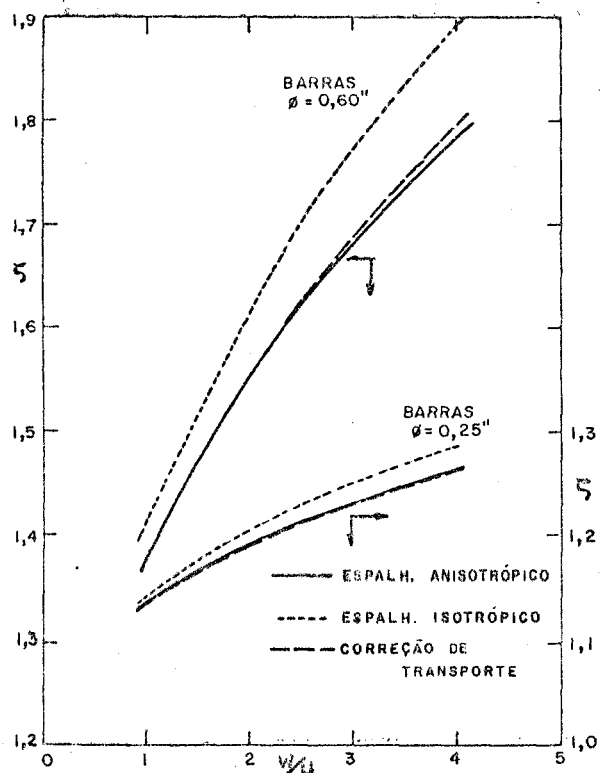


Fig. 3. Comparação de fator de desvantagem térmica x razão moderador-combustível, para dois diâmetros de barras combustíveis, por diferentes tratamentos dos termos de espalhamento elástico [21]

©

### 3.2 MODELO SECUNDÁRIO [5,10,11,26,27]

O operador de termalização  $\mathcal{H}$  (integral) definido por (3.7) pode ser substituído por um operador diferencial de segunda ordem aproximado - o modelo secundário, de Cadilhac. Este operador, de maneira simples e sem "mascarar o significado" do fenômeno físico pode "levar em consideração o comportamento particular de cada moderador" [26] através de duas funções ajustáveis.

Com efeito, define-se a função de desequilíbrio:

$$C(E) = \frac{d}{dE} \frac{\psi(E)}{\varphi_M(E)}$$

onde  $\varphi_M$  é o espectro de Maxwell:

$$\varphi_M(E) = \frac{E}{(kT)^2} e^{-E/kT}$$

Pode-se mostrar [5,10,26] que entre  $C(E)$  e  $q(E)$  existe uma relação  $q = LC$ , onde  $L$  é um operador integral; mostra-se também que existe um operador  $J = L^{-1}$  "auto-adjunto, definido, positivo" [11], de tal modo que se tem  $C = Jq$ .

A segunda relação do sistema de equações da termalização - (3.8) - pode ser substituída por essa relação, e se tem:

$$C(E) = J q(E) \quad (3.9)$$

O operador  $J$  tem a forma:

$$J = j(E) - \frac{d}{dE} k(E) \frac{d}{dE}$$

onde [27]:

$$j(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_n(\infty)} \frac{G(E)}{E kT \varphi_M(E)}$$

$$k(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_n(\infty)} \frac{H(E)}{\varphi_M(E)} \quad \text{⑥}$$

sendo  $\xi \Sigma_n(\infty)$  o poder de moderação a alta energia do moderador e  $G(E)$  e  $H(E)$  funções ajustáveis características do modelo secundário para o moderador.

A figura 4 apresenta as funções  $G(x)$  e  $H(x)$  ajustadas a partir do modelo de Nelkin para o espectro de frequências (com modificações baseadas em resultados obtidos das experiências de

Haywood-Thorson) para duas temperaturas diferentes, onde  $x$  é a velocidade reduzida

$$x = (E/kT_0)^{1/2}$$

( $kT_0 = E_0 = 0.025298$  eV). O comportamento assintótico dessas funções para  $x$  grande é [27]:

$$\begin{array}{lll} 293 \text{ }^\circ\text{K} & G \approx 1 + \frac{2,69}{x^2} & H \approx 0,986 + \frac{1,55}{x^2} \\ 553 \text{ }^\circ\text{K} & G \approx 1 + \frac{1,25}{x^2} & H \approx 0,936 + \frac{1,25}{x^2} \end{array}$$

Em termos da variável  $x$  e da densidade de nêutrons  $n(x)$ , pode-se mostrar que a equação (3.9) é expressa por:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{n(x)}{n_n(x)} \right] = 4 \frac{T_0}{T} \frac{G(x)}{\xi \sum_n(\infty) x n_n(x)} q(x) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{H(x)}{\xi \sum_n(\infty) x n_n(x)} \frac{dq(x)}{dx} \right] \quad (3.10)$$

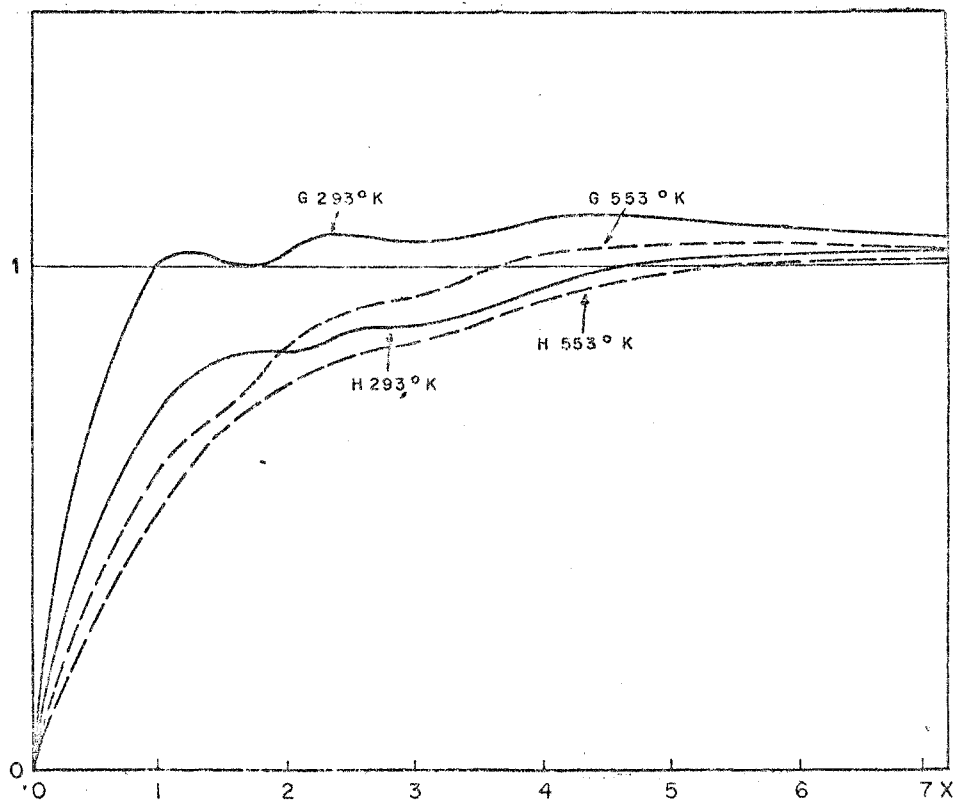


Fig. 4 Funções G e H do modelo secundário para a água, a duas temperaturas diferentes, ajustadas a partir do modelo de Nelkin [27].

#### 4 CRITICALIDADE

##### CÁLCULO ZERO-DIMENSIONAL [14]

Na criticalidade, a fuga de um reator nu é conhecida através do seu "buckling" geométrico [18]. Para se obter esta criticalidade pode-se então usar iterativamente o seguinte sistema de equações da difusão:

$$\begin{aligned}
 (-D_1 B^2 - \bar{\Sigma}_{a1} - \bar{\Sigma}_{r1}) \phi_1 + \frac{\chi_1}{\lambda} G &= 0 \\
 (-D_2 B^2 - \bar{\Sigma}_{a2} - \bar{\Sigma}_{r2}) \phi_2 + \frac{\chi_2}{\lambda} G + \bar{\Sigma}_{r1} \phi_1 &= 0 \\
 (-D_3 B^2 - \bar{\Sigma}_{a3} - \bar{\Sigma}_{r3}) \phi_3 + \frac{\chi_3}{\lambda} G + \bar{\Sigma}_{r2} \phi_2 &= 0 \\
 (-D_4 B^2 - \bar{\Sigma}_{a4} - \bar{\Sigma}_{r4}) \phi_4 + \frac{\chi_4}{\lambda} G + \bar{\Sigma}_{r3} \phi_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $\lambda$  é o valor próprio do sistema,

$$G = \sum_{m=1}^4 (\nu \bar{\Sigma}_f)_m \phi_m \quad \text{⑥}$$

e onde as constantes  $D_m, \bar{\Sigma}_{am}, \bar{\Sigma}_{rm}, (\nu \bar{\Sigma}_f)_m$  dos 4 macro-grupos (3 rápidos, 1 térmico) serão definidas (cap. 7) após a determinação dos respectivos espectros (cap. 6).

Definem-se ( $m = 1, 4$ ):

$$H_m = D_m B^2 + \bar{\Sigma}_{am} + \bar{\Sigma}_{rm}$$

$$\psi_m = \frac{\lambda}{G} \phi_m$$

onde  $\psi_m$  é um fluxo normalizado no grupo  $m$ .

As equações (4.1) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} -H_1 \psi_1 + X_1 &= 0 \\ -H_2 \psi_2 + X_2 + \sum r_{12} \psi_1 &= 0 \\ -H_3 \psi_3 + X_3 + \sum r_{23} \psi_2 &= 0 \\ -H_4 \psi_4 + X_4 + \sum r_{34} \psi_3 &= 0 \end{aligned}$$

e são resolvidas, para  $\psi$ , pelo método de solução em cadeia:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{H_1} X_1 \\ \psi_2 &= \frac{1}{H_2} [X_2 + \sum r_{12} \psi_1] \\ \psi_3 &= \frac{1}{H_3} [X_3 + \sum r_{23} \psi_2] \\ \psi_4 &= \frac{1}{H_4} [X_4 + \sum r_{34} \psi_3] \end{aligned}$$

Com todos os  $\psi_m$  determinados, faz-se

$$Z = \sum_{m=1}^4 (\nu \Sigma_f)_m \psi_m = \sum_{m=1}^4 (\nu \Sigma_f)_m \frac{\lambda \phi_m}{G} = \frac{\lambda}{G} \sum_{m=1}^4 (\nu \Sigma_f)_m \phi_m = \lambda$$

Reitera-se o processo, até se obter  $\lambda = 1$  - ou seja a criticalidade - modificando-se, em cada ciclo: ⑥

a) ou a geometria do reator - por exemplo seu  $B^2$ ;

b) ou a composição do reator - por exemplo seu  $\nu \Sigma_f$ .

PARTE II

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

©

## 5 TRATAMENTO ESPACIAL

### 5.1 CILINDRIZAÇÃO

A célula quadrada de lado  $p$  do reator é transformada na célula cilíndrica de mesma área - ou seja, de raio  $r$  tal que:

$$\pi r^2 = p^2$$

### 5.2 HOMOGENEIZAÇÃO

Uma vez cilindrizada, a célula heterogênea do reator é homogeneizada para dar entrada nos códigos de cálculo de espectro. Para esta homogeneização, inicialmente as relações de fluxo são calculadas por probabilidades de primeira colisão através da célula heterogênea cilindrizada do reator; a seguir algumas grandezas físicas são ponderadas de tal modo que simulem, numa célula homogênea fictícia, o comportamento da célula heterogênea real: obtêm-se assim as chamadas constantes de grupo.

A homogeneização, portanto, consiste na ponderação de algumas grandezas físicas da célula heterogênea pelo volume e pelo fluxo médio de cada região desta célula.

#### 5.2a Homogeneização no Domínio de Moderação

Assim, adotando-se a divisão do espectro de moderação em grupos (cf. Anexo I), em cada grupo  $g$  tem-se a constante de grupo "genérica":

$$X_g = \frac{\sum_k \psi_g^k V^k \sum_j X_g^{jk}}{\sum_k \psi_g^k V^k}$$

onde:

$k$  = região genérica - combustível, revestimento, moderador-da célula cilindrizada;

$j$  = nuclídeo genérico da célula;

$V^k$  = volume da região  $k$ ;

$\psi_g^k$  = fluxo médio de nêutrons em  $g$  e  $k$ :

$$\psi_g^k = \frac{\int_{V^k} \int_g \psi(\underline{n}, u) d\underline{n} du}{V^k \Delta_g}$$

$X_g^{jk}$  = constante de grupo "genérica" média -  $\Sigma_a, \Sigma_n, \Sigma_n', \Sigma_f, \xi \Sigma_n, \mu \Sigma_n, \nu \Sigma_f$  - de  $j$ , em  $g$  e em  $k$ :

$$X_g^{jk} = \frac{\int_{V^k} \int_g X^j(\underline{n}, u) d\underline{n} du}{V^k \Delta_g}$$

$\Delta_g$  = intervalo do grupo  $g$ , em letargia.

No domínio de moderação os  $\psi_g^k$  serão obtidos pelo código CORTINA [6], modificado pela introdução do formalismo de Barrett-Hicks [14], conforme mencionado na Introdução (Ver Anexo



IV). Este código usa a subrotina de cálculo de probabilidades de 1ª colisão, ALCOLL [6] modificada, conforme também é mencionado na Introdução.

CORTINA, na moderação, admitirá as seguintes hipóteses:

1ª a fonte de nêutrons em cada região da célula decorre do balanço de nêutrons na célula (ver Anexo IV);

2ª a reflexão de nêutrons, no limite exterior da célula é isotrópica;

3ª os choques de espalhamento elástico são supostos linearmente anisotrópicos no moderador e isotrópicos nas outras regiões.

#### 5.2b Homogeneização no Domínio de Termalização

A homogeneização, em cada energia  $E$  do domínio de termalização vem exposta no próprio tratamento da equação de balanço de nêutrons, 6.2.

Neste parágrafo aparecerão as funções - onde  $c$ ,  $r$  e  $m$  significam combustível, revestimento e moderador, respectivamente:

$$h(E) = \frac{\phi^c(E)}{\phi^m(E)} \qquad g(E) = \frac{\phi^r(E)}{\phi^m(E)} \quad \text{⑥}$$

que serão obtidas pelo código CORTINA [6] original. Aqui também será usada ALCOLL [6] modificada (cf. 5.2a).

CORTINA, na termalização, admite as seguintes hipóteses:

1ª a fonte de nêutrons em cada energia é uniforme, isotrópica e unitária no moderador e é nula nas outras regiões;

2ª a reflexão de nêutrons no limite exterior da célula é isotrópica;

3ª os choques de espalhamento elástico são supostos linearmente anisotrópicos no moderador e isotrópicos nas outras regiões.

Justifica-se a 2ª hipótese quer de 5.2a, quer de 5.2b através dos resultados de [21] mostrados na figura 5 abaixo.

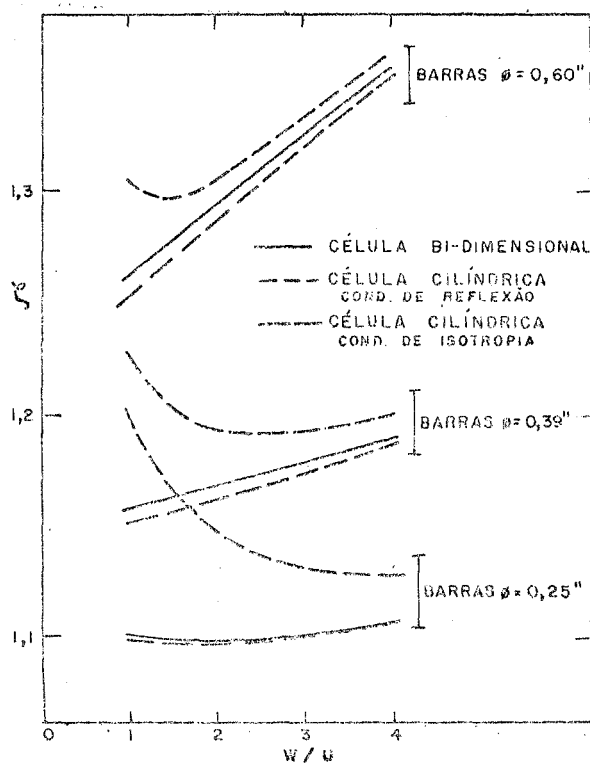


Fig. 5 Comparação das condições de reflexão especular e reflexão isotrópica com o cálculo bi-dimensional da célula [21]

## 6.1 ESPECTRO DE MODERAÇÃO [8,22]

6.1a Sistema de Equações da Moderação

Conforme mencionado na Introdução, o código de cálculo de espectro de nêutrons em moderação deverá ser basicamente o MUFT-4 americano [8]. Será então apresentado aqui o formalismo deste código.

Inicialmente - para uso nas equações (2.35) da aproximação de Goertzel-Greuling - definem-se (\*):

$$\eta(u) = \int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_0(u') e^{u'-u} du'$$

$$\xi(u) = \int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_1(u') e^{\frac{3}{2}(u'-u)} du'$$

cujas derivadas são:

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial u} = -\eta(u) + \Sigma_n^H(u) \bar{\Psi}_0(u)$$

$$\frac{\partial \xi(u)}{\partial u} = -\frac{3}{2} \xi(u) + \Sigma_n^H(u) \bar{\Psi}_1(u)$$

Portanto, tiram-se:

$$\int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_0(u') e^{u'-u} du' = -\frac{\partial \eta(u)}{\partial u} + \Sigma_n^H(u) \bar{\Psi}_0(u)$$

$$\int_0^u \Sigma_n^H(u') \bar{\Psi}_1(u') e^{\frac{3}{2}(u'-u)} du' = -\frac{2}{3} \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} + \frac{2}{3} \Sigma_n^H(u) \bar{\Psi}_1(u)$$

(\*) A partir deste ponto não será mais escrito o  $\beta$  nas expressões de  $\bar{\Psi}_0$ ,  $\bar{\Psi}_1$  e  $\bar{Q}_0$ .

que são levadas às referidas equações (2.35). Lembra-se aqui de que:

$$\begin{aligned}\xi^j &= 1 + \frac{\alpha^j \ln \alpha^j}{1 - \alpha^j} \\ \bar{\mu}^j &= \frac{2}{3 M^j} \\ \delta(u) &= \frac{\alpha^2 \arctan \alpha}{3(\alpha - \arctan \alpha)} \\ \alpha &= \frac{B}{Z(u)} \\ Z(u) &= Z_a(u) + Z_n'(u) + \sum_j Z_n^j(u)\end{aligned}$$

sendo  $j$  nuclídeo espalhador elástico.

Resulta, portanto, o sistema:

$$[Z_a(u) + Z_n'(u)] \bar{\psi}_0(u) - iB \bar{\psi}_1(u) = \bar{Q}_0 - \frac{\partial \eta(u)}{\partial u} - \frac{\partial q(u)}{\partial u}$$

$$[\delta(u)Z(u) - \sum_j \bar{\mu}^j Z_n^j(u)] \bar{\psi}_1(u) - \frac{iB}{3} \bar{\psi}_0(u) = -\frac{2}{3} \delta_1 \frac{\partial \xi(u)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial u} = -\eta(u) + \sum_n^{\#} \xi(u) \bar{\psi}_0(u) \quad (6.1)$$

$$\delta_1 \frac{\partial \xi(u)}{\partial u} = -\frac{3}{2} \xi(u) + \sum_n^{\#} \xi(u) \bar{\psi}_1(u) \quad \text{⑥}$$

$$\delta_2 \frac{\partial q(u)}{\partial u} = -q(u) + \sum_{j \neq H} \xi^j Z_n^j(u) \bar{\psi}_0(u)$$

Este é o sistema de equações resolvido por MUFT-4. Tem por incógnitas  $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \eta, \xi, q$ ;  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são dois parâmetros auxiliares para especificar a opção escolhida.

A tabela 3 resume as opções oferecidas em MUFT-4, e os valores correspondentes dos parâmetros auxiliares.

Tabela 3  
Opções do Código MUFT-4

Aproximação	Opções		Valor dos Parâmetros		
	Tipo				
P <sub>1</sub>	Inconsistente (ou de Selengut-Goertzel)		0	0	1
	Consistente		1	0	1
	Consistente de Goertzel-Greuling		1	1	1
B <sub>1</sub>	Inconsistente (ou de Selengut-Goertzel)		0	0	$\delta(u)$
	Consistente		1	0	$\delta(u)$
	Consistente de Goertzel-Greuling		1	1	$\delta(u)$

O termo  $\bar{Q}_0$  engloba tanto a fonte de fissão, quanto a fonte de espalhamento inelástico. Assim, sendo f nuclídeo fissil do combustível e i nuclídeo espalhador inelástico.

$$\bar{Q}_0(u) = \sum_f \chi^f(u) \int_0^\infty \sum_f^f(u') \nu^f(u') \bar{\Phi}_0(u') du' + \sum_i \int_0^u \sum_{n'}^i(u') f_{n'}^i(u' \rightarrow u) \bar{\Phi}_0(u') du' \quad (6)$$

#### 6.1b Discretização do Sistema de Equações

Considera-se, inicialmente, a seção de choque de absorção  $\Sigma_a(u)$  decomposta em duas partes: uma parte suave  $\Sigma_a^s(u)$  e uma parte ressonante  $\Sigma_a^r(u)$ . Definem-se, então:

$$H = \sum_a^S(u) + \sum_{n'}(u)$$

$$G = \delta(u) \bar{Z}(u) - \sum_j \bar{\mu}^j \sum_n^j(u)$$

$$C = \sum_n^H(u)$$

$$M = \sum_{j \neq H} \xi^j \sum_n^j(u)$$

$$R = \sum_a^R(u)$$

$$F = \bar{\psi}_0(u)$$

$$J = -i \bar{\psi}_1(u)$$

$$f = -i f(u)$$

$$X = \sum_f X^f(u) \int_0^\infty \sum_f^f(u') v^f(u') \bar{\psi}_0(u') du' \quad (6.2)$$

$$W = \sum_l \int_0^u \sum_{n'}^i(u') f_{n'}^i(u'-u) \bar{\psi}_0(u') du' \quad (6.3)$$

A integração das equações do sistema (6.1) em determinados grupos ou intervalos de letargia, fornece as equações multi-grupo correspondente. Sendo grande o número de grupos (54 grupos), serão pequenos os respectivos intervalos de letargia: uma aproximação suficientemente boa da integração acima consiste então simplesmente em se multiplicar, pelo intervalo considerado, a média aritmética da integranda neste intervalo.

Dêste modo, faz-se  $A_g$  o valor de  $A(u)$  no ponto  $u_g$ ;  $\bar{A}_g$  a média aritmética de  $A(u)$  no intervalo  $\Delta g$  compreendido entre  $u_{g-1}$  e  $u_g$ . A integração referida acima será, portanto, equivalente simplesmente a se tomar  $\bar{A}_g \Delta g$ .

Seguindo êste expediente - e introduzindo-se as grandezas recém-definidas - o sistema (6.1) se torna:

$$\begin{aligned}
 (\overline{HF})_g \Delta g + (\overline{RF})_g \Delta g + B \overline{J}_g \Delta g &= \overline{X}_g \Delta g + \overline{W}_g \Delta g + (\eta_{g-1} - \eta_g) \\
 &+ (q_{g-1} - q_g) \\
 (\overline{GJ})_g \Delta g - \frac{B}{3} \overline{F}_g \Delta g &= \frac{2}{3} \delta_1 (\beta_{g-1} - \beta_g) \\
 \eta_{g-1} - \eta_g &= \overline{\eta}_g \Delta g - (\overline{CF})_g \Delta g \\
 \delta_1 (\beta_{g-1} - \beta_g) &= \frac{3}{2} \overline{\beta}_g \Delta g - (\overline{CJ})_g \Delta g \\
 \delta_2 \lambda_g (q_{g-1} - q_g) &= \overline{q}_g \Delta g - (\overline{MF})_g \Delta g
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde  $\lambda_g$  é obtido pela ponderação:

$$\lambda_g = \frac{\sum_{j \neq H} (\epsilon_j \overline{\Sigma}_n \lambda)_g^j}{\sum_{j \neq H} (\epsilon_j \overline{\Sigma}_n)_g^j}$$

A função de espalhamento inelástico de  $g'$  para  $g$  se discretiza em  $(f_{n'})_{g'g}^i$  - onde  $g' < g$  - e é representada por uma matriz triangular descrevendo a transferência dos primeiros 30 grupos ( $g'$ ) nos primeiros 40 grupos ( $g$ ). Dêste modo, o termo de espalhamento inelástico pode ser escrito:

$$\overline{W}_g = \frac{1}{\Delta g} \sum_i \sum_{g'=1}^{30} (\overline{\Sigma}_{n'})_{g'}^i (f_{n'})_{g'g}^i \overline{F}_{g'} \Delta g'$$

ou, em forma matricial - onde se abandonam, por simplicidade, os índices  $i$  e  $n'$  - resulta:

$$\begin{array}{c} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \vdots \\ \bar{w}_g \\ \vdots \\ \bar{w}_{40} \end{array} = \sum_i \frac{1}{\Delta_g} \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ f_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ f_{13} & f_{23} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{1g} & f_{2g} & f_{3g} & \dots & f_{gg} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{140} & f_{240} & f_{340} & & f_{g40} & & f_{3040} \end{array} \times \begin{array}{c} \bar{\Sigma}_1 \bar{F}_1 \Delta_1 \\ \bar{\Sigma}_2 \bar{F}_2 \Delta_2 \\ \bar{\Sigma}_3 \bar{F}_3 \Delta_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\Sigma}_g \bar{F}_g \Delta_g \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\Sigma}_{30} \bar{F}_{30} \Delta_{30} \end{array}$$

### 6.1c Tratamento da Absorção Ressonante

A absorção ressonante é tratada pelo método NRIM modificado, de modo a ser calculada corretamente para uma mistura de H e elementos pesados. O termo de absorção ressonante é:

$$(\overline{RF})_g \Delta_g = (1 - p_{ag}) (\eta_{g-1} + q_{g-1}) \quad (6.5)$$

sendo a probabilidade de escape à ressonância num grupo genérico:

$$p_{ag} = \exp \left[ - \sum_j \sum_r (RI_a)^j_{rg} \right]$$

o 2º somatório se referindo às ressonâncias contidas no grupo  $g$ .

©

A integral de absorção ressonante é então calculada por:

$$(RI_a)^j_{rg} = \frac{\pi}{2} \frac{(m_a)^j_{rg}}{\xi_g} \left\{ A_g^j [A_g^j + (r_a)^j_{rg}] \right\}^{-1/2}$$

onde os parâmetros  $\nu_a$  - valor de pico da seção de choque ressonante de absorção - e  $m_a$  são dados por:

$$\nu_a = \frac{\sigma_0 \Gamma_a}{\Gamma}$$

$$m_a = \frac{\kappa_a \Gamma}{E_0} = \frac{\sigma_0 \Gamma_a}{E_0}$$



sendo:

$E_0$  = energia correspondente ao pico de ressonância;

$\sigma_0 = 4\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma}$  = valor de pico da seção de choque total para formação de núcleo composto;

$\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_n$  = amplitude total da ressonância;

$\Gamma_a = \Gamma_f + \Gamma_c$  = amplitude parcial para absorção (captura + fissão);

$\Gamma_n$  = amplitude parcial para reemissão de nêutron;

e os demais parâmetros são dados por:

$$\bar{\epsilon}_g = \frac{\sum_j (\xi \bar{\Sigma}_n)_g^j}{\sum_j (\bar{\Sigma}_n)_g^j} = \frac{\bar{c}_g + \sum_{j \neq H} (\xi \bar{\Sigma}_n)_g^j}{\bar{c}_g + \sum_{j \neq H} (\bar{\Sigma}_n)_g^j}$$

$$A_g^j = \frac{\sum_j (\bar{\Sigma}_n)_{g-1}^j + \frac{B^2}{3\bar{c}_{g-1}}}{N^j} = \frac{\bar{c}_g + \sum_{j \neq H} (\bar{\Sigma}_n)_{g-1}^j + \frac{B^2}{3\bar{c}_{g-1}}}{N^j}$$

### 6.1d Correção para o Efeito Döppler

Conforme já mencionado (cf. Introdução), deve agora ser introduzida correção para o efeito Döppler. De acordo com Goldman [15], supõe-se o meio ressonante formado por um gás cujos núcleos estão à temperatura  $T$  (em eV) e têm massa  $M$ ; a correção se compõe simplesmente da introdução de duas modificações no formalismo acima.

A primeira consiste na substituição de  $v_a$  por  $\sigma_0$  no parâmetro  $\eta_a$  acima. A segunda modificação consiste na substituição de  $v_a$  por  $\sigma_0 \Psi(\sqrt{2}\theta, 0)$  no parâmetro  $\eta_a$  acima.  $\Psi(\sqrt{2}\theta, 0)$  é o valor da função Döppler  $\Psi(\theta, \kappa)$ , sendo  $\kappa = 2(E - E_0)/\Gamma$ , "calculada numa temperatura  $T/2$  igual à metade da temperatura real  $T$  do material" [15] e à energia  $E_0$  do pico da ressonância respectiva; seu cálculo é feito através das relações:

$$\psi(0,0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta e^{\frac{\theta^2}{4}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Erfc}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\theta}{2}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

ou pela tabela 4.

Tabela 4 :  $\psi(\theta,0)$  para alguns valores de  $\theta$  [24].

$\theta$	$\psi(\theta,0)$
0,05	0,04309
0,10	0,08384
0,15	0,12239
0,20	0,15889
0,25	0,19347
0,30	0,22624
0,35	0,25731
0,40	0,28679
0,45	0,31477
0,50	0,34135

sendo:

$$\theta = \frac{\Gamma}{\Delta} \qquad \Delta = \left( \frac{4 m T E_0}{m} \right)^{1/2}$$

onde  $m$  é a massa do nêutron, os outros elementos já tendo sido definidos.

Ainda segundo Goldmann [15], a primeira modificação "é válida tanto para ressonância onde se justifica o uso da aproximação NRIM (como para o urânio), quanto onde se justifica o uso de NR (como para o alumínio e zircônio)". A segunda modificação - que consiste na substituição do valor de pico da ressonância não alargada, calculado a  $0^\circ\text{K}$ , pelo valor da ressonância alargada - "é superior ao método presentemente utilizado (...) para uma gama de valores da razão moderador-combustível e especialmente para altas temperaturas e amplitudes totais estreitas das ressonâncias".

### 6.1e Correção para o Efeito de Auto-Blindagem

Deve-se ainda considerar o efeito de auto-blindagem das ressonâncias decorrente da concentração do absorvedor na barra combustível. Assim, para levar em conta a redução da absorção na célula heterogênea, é aplicado um fator de auto-blindagem à integral de ressonância calculada para a célula homogênea.

Entretanto, segundo Strawbridge-Barry [23], "em reticulado a U-metal ou U-óxido ligeiramente enriquecido, o único isótopo para o qual a auto-blindagem é importante é o  $U^{238}$ . (...) Consequentemente todos os fatores de auto-blindagem são desprezados, exceto o do  $U^{238}$ ". Além disto, é definido apenas um fator global  $L^{28}$  para todas as ressonâncias deste isótopo. Desta maneira:

$$(RI)_{rg}^{28 \text{ het.}} = L^{28} (RI)_{rg}^{28 \text{ hom.}} \quad (6.6)$$

O Anexo III apresenta o formalismo de Strawbridge-Barry [23] para o cálculo de  $L^{28}$ .

### 6.1f Tratamento da Fissão Ressonante

A fissão ressonante - ou seja, a fração da absorção ressonante que causa fissão - é tratada simplesmente através de um fator  $\alpha$ .  $\alpha$  representa - para cada elemento  $j$  e para cada ressonância  $r$  pertencente ao grupo  $g$  - a fração de nêutrons absorvidos que produz fissão.

Dêste modo, a integral de fissão ressonante é simplesmente dada por:

$$(RI_f)_{rg}^j = \alpha_{rg}^j (RI_a)_{rg}^j \quad (6.7)$$

### 6.1g Determinação do Espectro

Com relação ao sistema (6.4) admite-se que - exceto quanto ao termo de absorção ressonante (6.5) - são pequenas as variações dos seus termos nos intervalos considerados. Assim, é possível substituir-se a média de um produto pelo produto das médias individuais.

Para as médias individuais serão usadas simplesmente as médias aritméticas dos valores das funções nos limites de cada grupo. É importante ainda salientar-se que, no sistema (6.4) acima, aparecem com valores nos pontos limítrofes de grupos apenas as funções de variação muito lenta (quais sejam  $\eta$ ,  $\rho$  e  $q$ ), aparecendo como médias entre estes pontos limítrofes as funções de variação menos lenta ( $F$  e  $J$ ).

Assim - introduzindo-se o termo de absorção ressonante (6.5) - o referido sistema passa a ser:

$$\bar{H}_g \bar{F}_g \Delta g + B \bar{J}_g \Delta g = \bar{\lambda}_g \Delta g - \eta_g - q_g + \rho_{ag} (\eta_{g-1} + q_{g-1}) + \bar{w}_g \Delta g$$

$$\bar{C}_g \bar{J}_g \Delta g - \frac{B}{3} \bar{F}_g \Delta g = \frac{2}{3} d_1 (\rho_{g-1} - \rho_g)$$

$$\eta_{g-1} - \eta_g = \bar{\eta}_g \Delta g - \bar{C}_g \bar{F}_g \Delta g \quad \textcircled{C}$$

$$d_1 (\rho_{g-1} - \rho_g) = \frac{3}{2} \bar{\rho}_g \Delta g - \bar{C}_g \bar{J}_g \Delta g \quad (6.8)$$

$$d_2 \lambda_g (q_{g-1} - q_g) = \bar{q}_g \Delta g - \bar{M}_g \bar{F}_g \Delta g$$

A resolução deste sistema em cada grupo  $g$  de letargia - sucessivamente, a partir de  $g = 1$  - é muito simples [cf. 8] e fornece a transformada de Fourier  $\bar{J}_g$  da corrente e  $\bar{F}_g$  do fluxo de nêutrons em um ponto genérico do reator. O conjunto dos 54 valores de  $\bar{F}_g$  é o espectro de nêutrons em moderação, procurado.

## 6.2 ESPECTRO DE THERMALIZAÇÃO

### 6.2a Equação do Balanço de Nêutrons

Em um elemento  $d\mathbf{r}$   $dE$  de um reator nu pode-se escrever a equação de balanço de nêutrons:

$$\int_0^{\infty} dE' \Sigma_n(\mathbf{r}, E') f_n(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \varphi(\mathbf{r}, E') d\mathbf{r} dE - \Sigma_n(\mathbf{r}, E) \varphi(\mathbf{r}, E) d\mathbf{r} dE = [\Sigma_a(\mathbf{r}, E) + D(\mathbf{r}, E) B^2(E)] \varphi(\mathbf{r}, E) d\mathbf{r} dE \quad (6.9)$$

Usando-se a definição do operador  $\mathcal{H}$  - eq. (3.7) - e integrando-se no volume da célula; obtém-se:

$$\int_V \mathcal{H} \varphi(\mathbf{r}, E) d\mathbf{r} = \int_V [\Sigma_a(\mathbf{r}, E) + D(\mathbf{r}, E) B^2(E)] \varphi(\mathbf{r}, E) d\mathbf{r} \quad (6.10)$$

### 6.2b Hipóteses Simplificativas

1ª o "buckling" geométrico do reator é independente da energia: para a demonstração do 1º teorema fundamental da teoria de reatores, postula-se que "todos os fluxos de nêutrons se anulam numa superfície definida" [18]. Portanto  $B^2$  independe de  $E$ . O anexo V fornece a parcela radial deste  $B^2$  (conf. Introdução). ©

2ª como coeficiente de difusão será tomado o coeficiente de difusão médio na célula, conforme Benoist [11]:

$$D(E) = \frac{\sum_i \sum_j V^i \varphi^i(E) \lambda^j(E) P^{ij}(E)}{3 \sum_i V^i \varphi^i(E)} \quad (6.11)$$

onde:

$V^i$  = volume da região  $i$  da célula

$\varphi^i(E)$  = fluxo médio de nêutrons na região  $i$  e na energia  $E$ , por unidade de energia; é igual a  $\frac{1}{V^i} \int_{V^i} \varphi(\underline{r}, E) d\underline{r}$

$\lambda^j$  = livre percurso médio de transporte da região  $j$ .

$P^{ij}$  = probabilidade de 1ª colisão da região  $i$  para a região  $j$ .

sendo  $P^{ij}(E)$  calculado pela subrotina ALCOLL [7] e  $\varphi^i(E)$  calculado pelo programa CORTINA [6].

3ª o moderador é o único meio termalizador comparado com os outros meios. Portanto  $\frac{d\varphi(E)}{dE} = 0$  para regiões diferentes do moderador.

4ª os meios combustível, revestimento e moderador são homogêneos.

### 6.2c Discretização da Equação do Balanço

Discretizando-se (6.10), e lembrando-se da definição de fluxo médio em cada região  $i$ :

$$\varphi^i(E) = \frac{1}{V^i} \int_{V^i} \varphi(\underline{r}, E) d\underline{r} \quad (6.12)$$

e, considerando-se as hipóteses simplificativas, obtém-se:

$$V^m H^m \varphi^m(E) = V^c \Sigma_a^c(E) \varphi^c(E) + V^r \Sigma_a^r(E) \varphi^r(E) + V^m \Sigma_a^m(E) \varphi^m(E) + V^{cel} D(E) B^2 \varphi^{cel}(E)$$

ou:

$$H^m \varphi^m(E) = \left[ \Sigma_a^m(E) + \frac{V^c}{V^m} \Sigma_a^c(E) h(E) + \frac{V^r}{V^m} \Sigma_a^r(E) g(E) + \frac{V^{cel}}{V^m} D(E) B^2 \frac{\varphi^{cel}(E)}{\varphi^m(E)} \right] \varphi^m(E) \quad (6.13)$$

onde m, c e r se referem ao moderador, combustível e revestimento, respectivamente, e onde:

$$h(E) = \frac{\varphi^c(E)}{\varphi^m(E)} \quad g(E) = \frac{\varphi^r(E)}{\varphi^m(E)} \quad (6.14)$$

e onde se nota que:

$$\frac{V^{cel}}{V^m} \frac{\varphi^{cel}(E)}{\varphi^m(E)} = 1 + \frac{V^c}{V^m} h(E) + \frac{V^r}{V^m} g(E)$$

Definindo-se:

$$\Sigma(E) = \Sigma_a^m(E) + \frac{V^c}{V^m} \Sigma_a^c(E) h(E) + \frac{V^r}{V^m} \Sigma_a^r(E) g(E) + \left[ 1 + \frac{V^c}{V^m} h(E) + \frac{V^r}{V^m} g(E) \right] D(E) B^2 \quad (6.15)$$

pode-se escrever (6.13) na forma

$$H^m \varphi^m(E) = \Sigma(E) \varphi^m(E) \quad (6.16)$$

Nota-se que esta equação tem a mesma forma da equação de balanço para um meio infinito homogêneo. Uma vez que se pode de-

terminar  $h(E)$  e  $g(E)$  através do programa CORTINA-ALCOLL [6,7], o problema em célula heterogênea se reduz a um problema de termalização em meio infinito homogêneo.

### 6.2d Determinação do Espectro

Pela própria definição (3.7) do operador  $\mathbb{H}$ , pode-se escrever a equação do balanço - na variável reduzida  $x = \sqrt{E/kT_0}$ :

$$\frac{dq^m(x)}{dx} = x \Sigma(x) n^m(x) \quad (6.17)$$

a qual, juntamente com a equação (3.10) do modelo secundário aplicada ao moderador:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{n^m(x)}{n_M(x)} \right] &= 4 \frac{T_0}{T^m} \frac{G(x)}{\xi \Sigma_n^m(\infty) x n_M(x)} q^m(x) + \\ &- \frac{d}{dx} \left[ \frac{H(x)}{\xi \Sigma_n^m(\infty) x n_M(x)} \frac{dq^m(x)}{dx} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

formam um sistema que permite que se determine o espectro da densidade de nêutrons no moderador,  $n^m(x)$ . ⑥

A equação (6.18) pode ser manipulada, transformando-se em:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{Y_m(x)}{n_M(x)} \right] = 4 \frac{T_0}{T^m} \frac{G(x)}{\xi \Sigma_n^m(\infty) x n_M(x)} q^m(x) \quad (6.19)$$

onde: 
$$Y_m(x) = \left[ 1 + H(x) \frac{\Sigma(x)}{\xi \Sigma_n^m(\infty)} \right] n^m(x)$$



O sistema de equações diferenciais constituído por (6.17) e (6.19) contém duas funções incógnitas  $n^m(x)$  e  $q^m(x)$ . São necessárias duas condições de contorno para integrá-lo.

Uma primeira condição de contorno é óbvia:

$$q^m(0) = 0$$

A segunda condição será determinada pela condição de acoplamento dos espectros de moderação e de termalização (em 6.3).

O problema está assim bem definido do ponto de vista matemático.

O sistema é integrado numericamente pelo método de Runge-Kutta - cálculo das funções desconhecidas passo a passo, a partir de um ponto inicial  $x_1$ . Para isto, é suficiente dar o valor das funções em  $x = x_1$ , o modo de calcular suas derivadas primeiras (isto é, as equações diferenciais) e uma malhagem em  $x$  no domínio de termalização:  $x_1 \approx 0$  a  $x_c$ , este correspondente à energia 0,625 eV (cf. Anexo II). Nesta malhagem são fornecidas as funções  $H(x)$ ,  $G(x)$  e as seções de choque dos corpos não em  $1/v$  presentes na célula.

©

### 6.3 ACOPLAMENTO DE ESPECTROS

O acoplamento do espectro de termalização é feito de modo tal que todo nêutron moderado para energia inferior a  $E_c = 0,625$  eV seja absorvido ou fuja da célula no grupo térmico:

$$\int_0^{E_c} \Sigma(E) \psi^m(E) dE = \gamma_{55} + \eta_{55} \quad (6.20)$$

sendo  $\eta_{55}$  e  $\eta_{55}$  as densidades de moderação à energia  $E_c$  devidas ao hidrogênio e aos outros isótopos, determinadas no cálculo do espectro de moderação.

Esta equação exprime o fato de que

$$\eta(x_c) = \eta_{55} + \eta_{55}$$

(onde se admite aqui que não há nêutrons cruzando  $x_c$  do domínio de termalização para o domínio de moderação).

## 7 CONSTANTES DOS MACRO-GRUPOS

Na definição das constantes dos macro-grupos - usadas em (4.1) no cálculo da criticalidade - consideram-se duas opções (cf. Introdução):

- 1 macro-grupo rápido e 1 térmico;
- 3 macro-grupos rápidos e 1 térmico.

A tabela 5 define os macro-grupos, em ambas as opções (cf. Anexos I e II, os limites usados).

TABELA 5  
DEFINIÇÃO DOS MACRO-GRUPOS

Opções	3 rápidos + 1 térmico				1 rápido+1 térmico	
	1	2	3	4	1	2
m = nº do macro-grupo						
lim.sup., eV	10 <sup>7</sup>	0,825.10 <sup>6</sup>	0,553.10 <sup>4</sup>	0,625	10 <sup>7</sup>	0,625
lim.inf., eV	0,825.10 <sup>6</sup>	0,553.10 <sup>4</sup>	0,625	0,253.10 <sup>-9</sup>	0,625	0,253.10 <sup>-9</sup>
grupos envolvidos	1 a 10	11 a 25	26 a 54	-	1 a 54	-

No parágrafo 7.1 será adotada a notação do parágrafo 6.1; em 7.2 será adotada a notação de 6.2. ©

### 7.1. CONSTANTES DOS MACRO-GRUPOS RÁPIDOS

No macro-grupo rápido m, as seções de choque de absorção e de produção de nêutrons são obtidos em ponderação pelo fluxo:

$$\Sigma_{am} = \frac{\sum_{g \in m} \int \Sigma_a(u) \psi_0(z, u) du}{\sum_{g \in m} \int \psi_0(z, u) du} = \frac{\sum_{g \in m} \int \Sigma_a(u) \bar{\psi}_0(B, u) du}{\sum_{g \in m} \int \bar{\psi}_0(B, u) du} =$$

$$= \sum_{g \in m} \frac{[\sum_{g-1}^g \bar{F}_g \Delta g + (1-p_{ag})(\eta_{g-1} + q_{g-1})]}{\sum_{g \in m} \bar{F}_g \Delta g}$$

$$(\nu \Sigma_f)_m = \frac{\sum_{g \in m} \int \nu(u) \Sigma_f(u) \psi_0(z, u) du}{\sum_{g \in m} \int \psi_0(z, u) du} = \frac{\sum_{g \in m} \int \nu(u) \Sigma_f(u) \bar{\psi}_0(B, u) du}{\sum_{g \in m} \int \bar{\psi}_0(B, u) du}$$

$$= \sum_{g \in m} \frac{[(\nu \Sigma_f)_g \bar{F}_g \Delta g + \nu_g (1-p_{fg})(\eta_{g-1} + q_{g-1})]}{\sum_{g \in m} \bar{F}_g \Delta g}$$

onde:

$$p_{fg} = \exp \left[ -\sum_j \sum_n (R_{fj})_{ng}^j \right]$$

O coeficiente de difusão é definido em ponderação pelo gradiante do fluxo:

$$D_m = \frac{\sum_{g \in m} \int D(u) \frac{\partial \psi_0(z, u)}{\partial z} du}{\sum_{g \in m} \int \frac{\partial \psi_0(z, u)}{\partial z} du}$$

Entretanto, como no formalismo de MUFT-4 - apresentado em (6.8) - não é calculado explicitamente  $D(u)$ , será aqui calculado através da corrente. Com efeito, pela lei de Fick, a integranda, do numerador é igual a  $-J(z, u)$ ; através de transformação de Fourier - e lembrando que se está usando a notação de 6.1 - obtém-se:

$$D_m = \frac{-\sum_{g \in m} \int \bar{\psi}_1(B, u) du}{-iB \sum_{g \in m} \int \bar{\psi}_0(B, u) du} = \frac{\sum_{g \in m} \int J(u) du}{B \sum_{g \in m} \int F(u) du} = \frac{\sum_{g \in m} \bar{J}_g \Delta g}{B \sum_{g \in m} \bar{F}_g \Delta g} \quad \text{©}$$

Adota-se aqui a hipótese: os macro-grupos m são suficiente  
mente largos para que haja remoção de m apenas para m + 1. Assim,  
a seção de choque de remoção de m é obtida - em cadeia, a partir de  
m = 1 - pelo balanço de nêutrons na célula do reator:

$$(\bar{\Sigma}_{nm} + \bar{\Sigma}_{am} + D_m B^2) \sum_{g \in m} \bar{F}_g \Delta g = \sum_{g \in m} \bar{X}_g \Delta g + \sum_{n, m-1} \sum_{g \in m-1} \bar{F}_g \Delta g$$

logo:

$$\bar{\Sigma}_{nm} = \frac{\sum_{g \in m} \bar{X}_g \Delta g + \sum_{n, m-1} \sum_{g \in m-1} \bar{F}_g \Delta g}{\sum_{g \in m} \bar{F}_g \Delta g} - (\bar{\Sigma}_{am} + D_m B^2)$$

sendo  $\bar{\Sigma}_{no} = 0$ .

## 7.2. CONSTANTES DO MACRO-GRUPO TÉRMICO

No macro-grupo térmico, as seções de choque de absorção e de produção de nêutrons são obtidas em ponderação pelo fluxo e pelo volume de cada região da célula do reator:

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{\int_0^{x_c} [\bar{\Sigma}_a^m(x) + \frac{V^c}{V^m} h(x) \bar{\Sigma}_a^c(x) + \frac{V^r}{V^m} g(x) \bar{\Sigma}_a^r(x)] \varphi^m(x) dx}{\frac{V^{cel}}{V^m} \int_0^{x_c} \varphi^{cel}(x) dx}$$

$$(\nu \bar{\Sigma}_f)_T = \frac{\int_0^{x_c} [\frac{V^c}{V^m} h(x) \nu(x) \bar{\Sigma}_f^c(x)] \varphi^m(x) dx}{\frac{V^{cel}}{V^m} \int_0^{x_c} \varphi^{cel}(x) dx}$$

O coeficiente de difusão - como no domínio de moderação - é definido em ponderação pelo gradiente do fluxo. No domínio de termalização, entretanto, o coeficiente de difusão é explicitamente usado no balanço de nêutrons na célula do reator (cf. eq. 6.9) - sendo para isto calculado em (6.11). Assim, considerando-se a separabilidade do fluxo de nêutrons em uma função do espaço e uma função da energia, obtêm-se:

$$D_4 = \frac{\int_0^{x_0} D(x) \varphi(x) dx}{\int_0^{x_0} \varphi(x) dx}$$

onde  $D(x)$  se calcula imediatamente a partir de  $D(E)$  em (6.11).

Tem-se, além disto,  $\sum r_4 = 0$  e  $X_4 = 0$ , evidentemente.

## SUGESTÕES

Para continuação d'êste trabalho - primeiro passo de uma longa caminhada - sugere-se:

1) O estudo mono-dimensional - R e Z - do reator cilíndrico refletido de núcleo de uma só região: para se tomar maior contato com o problema do cálculo da criticalidade;

2) o mesmo estudo para reator com núcleo de mais de uma região cilíndrica: para maior contato com o problema de achatamento radial do fluxo e da potência e com o problema da evolução do combustível;

3) o estudo bi-dimensional - XY e RZ - do reator: para maior contato com os problemas de controle;

4) o estudo de outros métodos mais recentes de cálculo de espectro quer em moderação, quer em termalização (\*);

5) finalmente, o estudo tridimensional do reator.

---

(\*) Com relação à termalização, há dois artigos de Turinsky-Duderstadt na Nuclear Science and Engineering de agosto d'êste ano - sôbre o que chamaram "Técnica do Kernel Degenerado" - que merecem ser estudados.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

1. UNESCO. Guia para a Redação de Artigos Científicos Destinados à Publicação. Belo Horizonte, UPMG, 1969.
2. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TECNICAS, R. Janeiro. Referências Bibliográficas. Norma Brasileira [PNB-66]. R. Janeiro, 1963.
3. BELL, G.I.-GLASSTONE, S. Nuclear Reactor Theory. New York, Van Nostrand Reinhold, 1970.
4. BRASIL, Leis, Decretos, etc. Unidades de Medida. Brasília, Imprensa Nacional, 1969.
5. WILLIAMS, M.M.R. The Slowing Down and Thermalization of Neutrons. Amsterdam, North-Holland, 1966.
6. KAVENOKY, A. Calcul et Utilisation des Probabilités de Première Collision pour des Milieux Hétérogènes à Une Dimension: Les Programmes ALCOLL et CORTINA [CEA-N-1077]. Saclay, 1969.
7. BRUN, A.M.-KAVENOKY, A. Traitement par Probabilités de Collisions du Choc Lineairement Anisotrope [Rapp. SPM-1068]. Saclay, CEA, 1969.
8. BOHL, E.-GELBARD, E. MUFT-IV Fast Spectrum Code for the IBM 704 [WAPD-TM-72]. Pittsburgh, 1957.
9. ELKOUBY, A. Compléments aux Études Paramétriques des Réacteurs a Eau Naturelle. Thermalisation des Neutrons dans Un Réacteur a Eau Naturelle et Code COELACANTHE [Rapp. SPM-947]. Saclay, CEA, 1964.
10. NIGON, J.L. Calcul des Constantes Thermiques de Réseau a Eau Légère et Uranium Faiblement Enrichi [Rapp. SPM-1054]. Saclay, CEA, 1968.
11. ELKOUBY, A. et al. Calculs de Cellule et Evolution Ponctuelle dans les Réseaux a Eau Ordinaire. Programme EVEREST [Rapp. SPM-1169]. Saclay, CEA, 1971.
12. HICKS, D. Light Water Lattice Calculations in the United Kingdom. In: Light Water Lattices. Vienna, IAEA, 1962.
13. HELLENS, R.L.-HONECK, H.C. A Summary and Preliminary Analysis of the BNL Slightly Enriched Uranium. In: Light Water Lattices. Vienna, IAEA, 1962.



14. BARRET, P.R.-HICKS, T.E. A Graduate Course in Intermediate Nuclear Fission Reactor Analysis. Los Angeles, UCLA, 1968.
15. GOLDMAN, D.T. Suggested Procedures for Utilizing MUFT Resonance Parameters to Include Döppler Broadening. Nucl. Sci. Eng., Hinsdale, 31:346-9, 1968.
16. MURRAY, R.L. et al. Geometric Buckling of Polygonal Reactors. Nucl. Sci. Eng., Hinsdale, 34:86-7, 1968.
17. HONECK, H.C. Basic Theory and Concepts. Trans. Amer. Nucl. Soc., Hinsdale, 13:391, 1970.
18. WEINBERG, A.M.-WIGNER, E.P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. Chicago, University of Chicago, 1958.
19. LAMARSH, J.R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Reading, Addison-Wesley, 1966.
20. GLASSSTONE, S.-EBLUND, M.C. The Elements of Nuclear Reactor Theory. Princeton, Van Nostrand, 1952.
21. HONECK, H.C. The Calculation of the Thermal Utilization and Disadvantage Factor in Uranium/Water Lattices. Nucl. Sci. Eng., Hinsdale, 18:49-68, 1964.
22. HELLENS, R.L. et al. Multigroup Fourier Transform Calculation. Description of MUFT-III Code [WAPD-TM-4]. Pittsburgh, 1956.
23. STRAWBRIDGE, L.E.-BARRY, R.F. Criticality Calculations for Uniform Water-Moderated Lattices. Nucl. Sci. Eng., Hinsdale, 23:58-73, 1965.
24. BEYNON, T.D.-GRANT, F.S. Evaluation of the Döppler-Broadened Single-Level and Interference Functions. Nucl. Sci. Eng., Hinsdale, 17:547-50, 1963.
25. EUA, Argonne National Laboratory. Reactor Physics Constants, 2nd.ed. [ANL-5800]. Washington, USAEC, 1963.
26. MEYER-HEINE, A. Curso de Métodos de Cálculo Físico de Reatores, amp. por E.V.PAES e A.A.R.LOBO [GT-INF-6]. Belo Horizonte, IPR, 1968.
27. LIVOLANT, M. Thermalisation des Neutrons. Bibliothèque de Données, Méthodes et Codes de Calcul de Cellules [CEA-N-1243]. Saclay, 1970.
28. CASE, K.M. et al. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Los Angeles, UCLA, 1953.

## ANEXO I : ESTRUTURA DO DOMINIO DE MODERAÇÃO [25]

Número do Grupo	Energia Inferior eV	Letargia Inferior	Intervalo de Letargia	Número do Grupo	Energia Inferior eV	Letargia Inferior	Intervalo de Letargia
	$10 \times 10^6$	0		29	750	9,50	0,50
1	7,79	0,25	0,25	30	454	10,00	↕
2	6,07	0,50	↕	31	275	10,50	↕
3	4,72	0,75	↕	32	167	11,00	0,50
4	3,68	1,00	↕	33	130	11,25	0,25
5	2,86	1,25	↕	34	101	11,50	↕
6	2,23	1,50	↕	35	78,7	11,75	↕
7	1,74	1,75	↕	36	61,3	12,00	↕
8	1,35	2,00	↕	37	47,8	12,25	↕
9	$1,05 \times 10^6$	2,25	0,25	38	37,2	12,50	0,25
10	$821 \times 10^3$	2,50	0,25	39	29,0	12,75	0,25
11	639	2,75	↕	40	22,6	13,00	↕
12	498	3,00	↕	41	17,6	13,25	↕
13	387	3,25	↕	42	13,7	13,50	↕
14	302	3,50	↕	43	10,7	13,75	↕
15	235	3,75	↕	44	8,32	14,00	↕
16	183	4,00	↕	45	6,50	14,25	↕
17	143	4,25	↕	46	5,10	14,50	↕
18	$111 \times 10^3$	4,50	0,25	47	3,97	14,75	0,25
19	$86,5 \times 10^3$	4,75	0,25	48	3,06	15,00	0,25
20	67,4	5,00	0,25	49	2,38	15,25	0,25
21	40,9	5,50	0,50	50	1,855	15,50	0,25
22	24,8	6,00	↕	51	1,440	15,7538	0,2538
23	15,0	6,50	↕	52	1,125	16,00	0,2462
24	9,12	7,00	↕	53	0,835	16,30	0,3000
25	5,53	7,50	↕	54	0,625	16,5884	0,2884
26	3,35	8,00	↕				
27	2,03	8,50	↕				
28	$1,23 \times 10^3$	9,00	0,50				

ANEXO II : ESTRUTURA DO DOMÍNIO DE THERMALIZAÇÃO

Número do ponto	Energia eV	Velocidade Reduzida	Número do ponto	Energia eV	Velocidade Reduzida	Número do ponto	Energia eV	Velocidade Reduzida	Número do ponto	Energia eV	Velocidade Reduzida
1	$0,2530 \times 10^{-9}$	0,0001	21	$0,7312 \times 10^{-4}$	1,70	41	$0,2925 \times 10^0$	3,40			
2	$0,4016 \times 10^{-8}$	0,0126	22	0,8198	1,80	42	0,2968	3,43			
3	$0,1594 \times 10^{-4}$	0,0251	23	0,9134	1,90	43	0,3011	3,45			
4	0,3577	0,0376	24	$0,1012 \times 10^0$	2,00	44	0,3055	3,48			
5	0,6350	0,0501	25	0,1116	2,10	45	0,3099	3,50			
6	$0,1427 \times 10^{-3}$	0,0751	26	0,1225	2,20	46	0,3188	3,55			
7	0,2535	0,100	27	0,1338	2,30	47	0,3279	3,60			
8	0,5700	0,150	28	0,1457	2,40	48	0,3464	3,70			
9	$0,1013 \times 10^{-2}$	0,200	29	0,1581	2,50	49	0,3653	3,80			
10	0,2278	0,300	30	0,1645	2,55	50	0,3848	3,90			
11	0,4050	0,400	31	0,1710	2,60	51	0,4048	4,00			
12	0,5125	0,450	32	0,1777	2,65	52	0,4271	4,109			
13	0,6327	0,500	33	0,1844	2,70	53	0,4500	4,218			
14	0,9110	0,600	34	0,1984	2,80	54	0,4607	4,268			
15	$0,1240 \times 10^{-1}$	0,700	35	0,2128	2,90	55	0,4716	4,318			
16	0,2050	0,900	36	0,2277	3,00	56	0,4826	4,368			
17	0,3062	1,10	37	0,2431	3,10	57	0,4937	4,418			
18	0,4276	1,30	38	0,2591	3,20	58	0,5163	4,518			
19	0,5693	1,50	39	0,2755	3,30	59	0,5394	4,618			
20	$0,6477 \times 10^{-1}$	1,60	40	$0,2839 \times 10^0$	3,35	60	0,5512	4,668			
						61	0,5630	4,718			
						62	0,5750	4,768			
						63	0,5872	4,818			
						64	0,6118	4,918			
						65	$0,6250 \times 10^0$	4,971			

$$x = \sqrt{\frac{E}{E_0}}$$

$$E_0 = 0,025298 \text{ eV}$$

ANEXO III: FORMALISMO DO CÁLCULO  
DO FATOR DE AUTO-BLINDAGEM [11,23]

Conforme Strawbridge-Barry [23], a integral de absorção ressonante do  $U^{28}$  entre 0,625 eV e 10 MeV e a qualquer temperatura - incluindo 1,08 b para a absorção em  $1/\nu$  - pode ser expressa pela "correlação metal-óxido":

$$Rf_a^{28} = 2,56 + 2,16 \alpha + (0,0279 \alpha - 0,0537) T_{ef}^{1/2}$$

onde:

$T_{ef}$ : temperatura do combustível ( $^{\circ}K$ )

$$\alpha = \left[ \frac{\sum_n^c P^c}{N^{28}} \quad \frac{D_{ef}}{l^c N^{28}} \right]^{1/2}$$

$\sum_n^c$ : seção de choque de difusão do combustível (sendo  $\sigma_n^u = 10,7$  b e  $\sigma_n^o = 3,8$  b);

$N^{28}$ : concentração do  $U^{28}$  no combustível ( $10^{24}$  at/cm<sup>3</sup>);

$l^c = 2R^c$ : corda média do combustível;

$P^c = 1 - P_c$  : probabilidade de auto-colisão no combustível ( $P_c$  é tabulada em função de  $\sum_n^c R^c$  em [23]);

$D_{ef} = \frac{D}{1 + 0,1(1-D)}$  : fator efetivo de sombra (fator de Dancoff) do reticulado;

$D = 1 - \frac{e^{-2 \sum^m L^m}}{1 + (1-z) \sum^m L^m}$  : negritude do moderador (método de Sauer);

$\Sigma_m$  : seção de choque total do "moderador";

$\bar{c}^m = \bar{c}^c \frac{v^m}{v^c}$  : corda média no "moderador" (meio fictício, equivalente aos meios diferentes do combustível);

$$\bar{c} = \left\{ \left[ \frac{\bar{\eta}}{4} \left( 1 + \frac{v^m}{v^c} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\} \frac{v^c}{v^m} - 0,08$$

Pela expressão de Wigner para a probabilidade de escape à ressonância,  $p^{28} = \exp \left[ - \frac{N^{28} (R_{1c})^{28}}{\xi \Sigma_n} \right]$ , calcula-se então:

$$\omega^{28} = \frac{1 - p^{28}}{p^{28}}$$

Agora, tomando-se  $L^{28}$  arbitrário, faz-se um cálculo MUFT no qual se anulam as fugas e as absorções que não as do  $U^{28}$ . Calcula-se então

$$\omega^{*28} = \frac{\text{captura total de nêutrons}}{\text{produção total-absorção total}}$$

que é comparado ao  $\omega^{28}$ : sendo diferente, toma-se novo  $L^{28}$  e repete-se o processo.

Quando  $\omega^{*28} = \omega^{28}$ , tem-se o bom valor de  $L^{28}$  que é então usado em (6.6) para o cálculo MUFT normal.

ANEXO IV: FORMALISMO DO CÁLCULO  
DO FATOR DE VANTAGEM RÁPIDO [14]

A célula heterogênea cilindrizada do reator, sendo dividida em  $L$  coroas cilíndricas concêntricas, o formalismo de Barrett-Hicks [14] fornece - para um dado grupo  $g$  do domínio de moderação - o fluxo  $\psi^l$  em cada coroa  $l$ . Por outro lado, o fluxo médio  $\psi^k$  em cada região  $k$  - combustível, revestimento, moderador - da célula, é dado por:

$$\psi^k = \frac{\sum_{l \in k} \psi^l V^l}{V^k}$$

Assim, fazendo o fluxo no moderador igual a 1, os  $\psi^k$  - necessários para o cálculo das constantes de grupo em 5.1a - são então exatamente os fatores de vantagem rápidos procurados.

No presente formalismo adota-se a hipótese simplificativa: o fluxo de nêutrons  $\psi^l$  é plano em cada coroa  $l$ .

Tratando então a remoção de grupo por choque elástico pela aproximação de Goertzel-Greuling, resulta a seguinte equação de balanço no grupo  $g$  e na coroa  $k$ :

[Taxa total de reação em  $g$  e em  $l$ ]:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Nêutrons de fissão, aparecendo em } g \text{ em todas as coroas} \\ \text{pertencentes ao combustível e fazendo sua } 1^{\text{a}} \text{ colisão em} \\ l'. \end{array} \right] +$$

$$+ \left[ \begin{array}{l} \text{Nêutrons de espalhamento inelástico, aparecendo em } g \\ \text{em todas as coroas pertencentes ao combustível ou ao} \\ \text{revestimento e fazendo sua } 1^{\text{a}} \text{ colisão em } l'. \end{array} \right] +$$

+ [Nêutrons de espalhamento elástico, provenientes de colisões em tôdas as coroas e fazendo sua próxima colisão em  $l'$  (ou seja, dentre aqueles que fazem colisão, apenas os que não são removidos para grupos de letargia superior)].

Assim - tomando-se o valor médio no grupo  $g$  das grandezas dependentes do espectro - tem-se:

$$\begin{aligned} \sum^l \psi^l v^l \Delta = & \\ & = \sum_{l \in c} X^l p^{ll'} v^l \Delta + \\ & + \sum_{l \in c, r} W^l p^{ll'} v^l \Delta + \\ & + \sum_{l \in c, r, m} \sum_j \left[ \sum_n^{jl} \psi^l - \xi^j \frac{\Delta (\sum_n^{jl} \psi^l)}{\Delta} \right] p^{ll'} v^l \Delta \end{aligned}$$

onde  $\xi^j$  é definido em (2.23) e :

$c, r, m$  = combustível, revestimento, moderador;

$j$  = elemento espalhador elástico;

$\psi^l$  = fluxo médio na coroa  $l$  ;

$\Sigma^l$  = seção de choque total da coroa  $l$  ;

$\sum_n^{jl}$  = seção de choque elástica do elemento  $j$  na coroa  $l$  ;

$\Delta$  = intervalo do grupo  $g$  (em letargia);

$V^l$  = volume da coroa  $l$  (por unidade de altura);

$p^{ll}$  = probabilidade de que um nêutron, partindo de  $l$ ,  
faça a seguir uma colisão em  $l$  (\*);

e onde  $W^l$  e  $X^l$  são as fontes de espalhamento inelástico e de fissão - dadas por (6.2) e (6.3), respectivamente, e discretizadas conforme 6.1b - correspondentes à coroa  $l$ . (Notar, entretanto, que, como se deseja obter apenas a forma do fluxo através da célula, e não o seu valor real, usa-se um  $X^l$  normalizado na equação acima, ou seja, o valor dado em (6.2), dividido por  $\sum_f \int_0^\infty$ ).

Adotando-se um processo tipo cadeia, o sistema de  $L$  equações lineares acima é resolvido (\*\*) em cada grupo  $g$ , com  $g = 1, 2, \dots$  (cf. Anexo I). Obtêm-se, então, os  $\psi^l$ , com os quais se calculam os  $\psi^k$  procurados.

⑥

---

(\*) Probabilidade calculada por ALCOLL modificado, ou seja, o programa original [6] com as modificações propostas em [7] (cf. Introdução).

(\*\*) Por meio de CORTINA modificado, ou seja, o programa original [6], no qual se introduz o presente formalismo (cf. Introdução).



ANEXO V

"BUCKLING" GEOMÉTRICO RADIAL X RAI0 INSCRITO  
 PARA REATORES POLIGONAIS DE N LADOS [16]

N	BR	N	BR
3	2,094 395	13	2,383 828
4	2,221 441	14	2,386 586
5	2,282 100	15	2,388 833
6	2,316 572	16	2,390 689
7	2,338 201	17	2,392 240
8	2,352 709	18	2,393 549
9	2,362 928	19	2,394 663
10	2,370 403	20	2,395 620
11	2,376 039	$\infty$	2,404 826
12	2,380 393		